目　　录

数学是科学的大门和钥匙.

——伽利略

一种科学只有在成功地运用数学时，才算达到完善的地步.

——马克思

致 同 学

亲爱的同学，祝贺你开始高中阶段的学习生活.

我们知道，数学与生活紧密相连. 数学可以帮助我们认识世界，改造世界，创造新的生活. 数学是高中阶段的重要学科，不仅是学习物理、化学等学科的基础，而且对我们的终身发展有较大的影响.

面对实际问题，我们要认真观察、实验、归纳，大胆提出猜想. 为了证实或推翻提出的猜想，我们要通过分析，概括、抽象出数学概念，通过探究、推理，建立数学理论. 我们要积极地运用这些理论去解决问题. 在探究与应用过程中，我们的思维水平会不断提高，我们的创造能力会得到发展. 在数学学习过程中，我们将快乐地成长.

考虑广大同学的不同需要，本书提供了较大的选择空间.

书中的引言、正文、练习、习题中的“感受 · 理解”、阅读、本章回顾等内容构成一个完整的体系. 它体现了教材的基本要求，是所有学生应当掌握的内容. 相信你一定能学好这部分内容.

本书还设计了一些具有挑战性的内容，包括思考、探究、链接，以及习题中的“思考 · 运用”、“探究 · 拓展”等，以激发你探索数学的兴趣. 在掌握基本内容之后，选择其中一些内容作思考与探究，你会更加喜欢数学.

说　　明

江苏教育出版社出版的《普通高中课程标准实验教科书·数学》是根据2003年教育部制订的《普通高中数学课程标准(实验)》编写的.

该套教科书充分体现数学课程标准的基本理念,使学生通过高中阶段的学习,能获得适应现代生活和未来发展所必需的数学素养,满足他们个人发展与社会进步的需要.

教科书力图使学生在丰富的、现实的、与他们经验紧密联系的背景中感受数学、建立数学、运用数学,做到“入口浅,寓意深”. 通过创设恰当的问题情境,引导学生进行操作、观察、探究和运用等活动,感悟并获得数学知识与思想方法. 在知识的发生、发展与运用过程中,培养学生的思维能力、创新意识和应用意识.

教科书按知识发展、背景问题、思想方法三条主线,通过问题将全书贯通. 每个模块围绕中心教育目标展开,每章围绕核心概念或原理展开. 教科书充分关注数学与自然、生活、科技、文化、各门学科的联系,让学生感受到数学与外部世界是息息相通、紧密相连的.

教科书充分考虑学生的不同需求,为所有学生的发展提供帮助,为学生的不同发展提供较大的选择空间. 整个教科书设计为:一个核心(基本教学要求),多个层次,多种选择. 学好核心内容后,根据需要,学生有多种选择,每一个人都能获得必备的数学素养与最佳发展.

众多的数学家、心理学家、学科教育专家、特级教师参加了本套教科书的编写工作. 参与本册讨论与审稿的专家与教师有:陈跃辉、董林伟、丁世明、陆云泉、寇恒清、冯惠愚、冯建国、胡晋宾、蒋声、石志群、孙旭东、陶维林、杨裕前、于明、周学祁等,在此向他们深表感谢!

本书编写组

2004年7月

本书部分常用符号

$\in$	$x \in A$	x 属于 A；x 是集合 A 的一个元素
$\notin$	$y \notin A$	y 不属于 A；y 不是集合 A 的一个元素
$\{,\cdots,\}$	$\{a, b, c, \cdots, n\}$	诸元素 a，b，c，…，n 构成的集合
$\{\mid\}$	$\{x \mid p(x), x\in A\}$	使命题 $p(x)$ 为真的 A 中诸元素的集合
$\varnothing$		空集
$\mathbf{N}$		非负整数集；自然数集
$\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$		正整数集
$\mathbf{Z}$		整数集
$\mathbf{Q}$		有理数集
$\mathbf{R}$		实数集
$\subseteq$	$B\subseteq A$	B 包含于 A；B 是 A 的子集
$\subsetneqq$	$B\subsetneqq A$	B 真包含于 A；B 是 A 的真子集
$\not\subseteq$	$B\not\subseteq A$	B 不包含于 A；B 不是 A 的子集
$\cup$	$A\cup B$	A 与 B 的并集
$\cap$	$A\cap B$	A 与 B 的交集
$\complement$	$\complement_A B$	A 中子集 B 的补集或余集
$[\ ,\ ]$	$[a, b]$	$\mathbf{R}$ 中由 a 到 b 的闭区间
$(\ ,\ )$	(a, b)	$\mathbf{R}$ 中由 a 到 b 的开区间
$[\ ,\ )$	$[a, b)$	$\mathbf{R}$ 中由 a（含于内）到 b 的右半开区间
$(\ ,\ ]$	$(a, b]$	$\mathbf{R}$ 中由 a 到 b（含于内）的左半开区间
$f: A\to B$		集合 A 到集合 B 的映射

第 1 章　集　　合

集合

- 集合的含义及其表示
- 子集、全集、补集
- 交集、并集

数学也是一种语言，从它的结构和内容来看，这是一种比任何国家的语言都要完善的语言.

……通过数学，自然界在论述；通过数学，世界的创造者在表达；通过数学，世界的保护者在讲演.

——狄尔曼

蓝蓝的天空中，一群鸟在欢快地飞翔；

茫茫的草原上，一群羊在悠闲地走动；

清清的湖水里，一群鱼在自由地游泳；

……

鸟群、羊群、鱼群……都是“同一类对象汇集在一起”，这就是本章将要学习的集合.

其实，在学习“自然数”、“有理数”等内容时，我们已经使用了“自然数集”、“有理数集”等术语. 我们知道，所有的自然数在一起构成“自然数集”，所有的有理数在一起构成“有理数集”. 这里，用“集合”来描述研究的对象，既简洁又方便. 那么，我们不禁要问：

集合的含义是什么？

集合之间有什么关系？

怎样进行集合的运算？

集合的含义及其表示

请仿照下列叙述，向全班同学介绍一下你的家庭、原来读书的学校、现在的班级等情况.

我家有爸爸、妈妈和我；

我来自第三十八中学；

我现在的班级是高一(1)班. 全班共有学生 45 人，其中男生 23 人，女生 22 人.

像“家庭”、“学校”、“班级”、“男生”、“女生”等概念有什么共同的特征？

在生活中，我们会遇到各种各样的事物. 为了方便讨论，我们需要在一定范围内，按一定标准对所讨论的事物进行分类. 分类后，我们会用一些术语来描述它们，例如“群体”、“全体”、“集合”等.

一般地，一定范围内某些确定的、不同的对象的全体构成一个 (set). 集合中的每一个对象称为该集合的 (element)，简称 .

“中国的直辖市”构成一个集合，该集合的元素就是北京、天津、上海和重庆这四个城市.

“young 中的字母”构成一个集合，该集合的元素就是 y，o，u，n，g 这五个字母.

“book 中的字母”也构成一个集合，该集合的元素就是 b，o，k 这三个字母.

集合常用大写拉丁字母来表示，如集合 A、集合 B 等.

一般地， 记作 $\mathbf{N}$， 记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$， 记作 $\mathbf{Z}$， 记作 $\mathbf{Q}$， 记作 $\mathbf{R}$.

集合的元素常用小写拉丁字母表示. 如果 a 是集合 A 的元素，就记作 $a\in A$，读作“a 属于 A”；如果 a 不是集合 A 的元素，就记作 $a\notin A$ 或 $a \overline{\in} A$，读作“a 不属于 A”. 例如，$\sqrt{2}\in \mathbf{R}$，$\sqrt{2}\notin \mathbf{Q}$.

表示集合的常用方式有以下两种：

将集合的元素一一列举出来，并置于花括号“{ }”内，如{北京，天津，上海，重庆}，{y，o，u，n，g}. 用这种方法表示集合，元素之间要用逗号分隔，但列举时与元素的次序无关.

如果两个集合所含的元素完全相同（即 A 中的元素都是 B 的元素，B 中的元素也都是 A 的元素），则称这两个集合 ，如

{北京，天津，上海，重庆}={上海，北京，天津，重庆}.

将集合的所有元素都具有的性质（满足的条件）表示出来，写成 $\{x \mid p(x)\}$ 的形式，如：$\{x \mid x$ 为中国的直辖市$\}$，$\{x \mid x$ 为 young 中的字母$\}$，$\{x \mid x < -3, x \in \mathbf{R}\}$.

有时用 Venn 图示意集合，更加形象直观（如图 1－1－1）.

北京，上海，
天津，重庆

(1)

y，o，u，n，g

(2)

一个集合可以用不同的表示方法，例如，由方程 $x^2 - 1 = 0$ 所有的实数解构成的集合，可以表示为下列形式.

(1) 列举法：$\{-1, 1\}$（也可以是 $\{1, -1\}$）；

(2) 描述法：$\{x \mid x^2 - 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$（也可以是 $\{x \mid x$ 为方程 $x^2 - 1 = 0$ 的实数解$\}$）.

求不等式 $2x - 3 > 5$ 的解集.

由 $2x - 3 > 5$ 可得 $x > 4$，所以不等式 $2x - 3 > 5$ 的解集为

$$\{x \mid x > 4, x \in \mathbf{R}\}.$$

这里，$\{x \mid x > 4, x \in \mathbf{R}\}$ 可简记为 $\{x \mid x > 4\}$.

例 1 中的解集的元素有无限多个.

一般地，含有有限个元素的集合称为 (finite set). 若一个集合不是有限集，就称此集合为 (infinite set). 我们把不含任何元素的集合称为 (empty set)，记作 $\varnothing$.

求方程 $x^2+x+1=0$ 所有实数解的集合.

因为 $x^2+x+1=0$ 没有实数解,所以

$$\{x \mid x^2+x+1=0,\ x\in\mathbf{R}\}=\varnothing.$$

1. 用列举法表示下列集合：

(1) $\{x \mid x+1=0\}$.

(2) $\{x|x$ 为 15 的正约数$\}$；

(3) $\{x|x$ 为不大于 10 的正偶数$\}$；

2. 用描述法表示下列集合：

(1) 奇数的集合；

(2) 正偶数的集合；

(3) 不等式 $x^2+1\leqslant 0$ 的解集.

3. 用"$\in$"或"$\notin$"填空：

(1) 1 ________ $\mathbf{N}$, -3 ________ $\mathbf{N}$, 0 ________ $\mathbf{N}$, $\sqrt{2}$ ________ $\mathbf{N}$,

1 ________ $\mathbf{Z}$, -3 ________ $\mathbf{Q}$, 0 ________ $\mathbf{Z}$, $\sqrt{2}$ ________ $\mathbf{R}$;

(2) $A=\{x \mid x^2-x=0\}$,则 1 ________ A, -1 ________ A;

(3) $B=\{x \mid 1\leqslant x\leqslant 5,\ x\in\mathbf{N}\}$,则 1 ________ B, 1.5 ________ B;

(4) $C=\{x \mid -1<x<3,\ x\in\mathbf{Z}\}$,则 0.2 ________ C,3 ________ C.

4. 用列举法表示下列集合：

(1) $\{a \mid 0\leqslant a<5,\ a\in\mathbf{N}\}$；

(2) $\{(x,\ y) \mid 0\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y<2,\ x,\ y\in\mathbf{Z}\}$；

(3) "mathematics"中字母构成的集合.

5. 调查你所在小组同学的生肖,写出与你生肖相同的所有同学的集合.

子集、全集、补集

观察下列各组集合，A 与 B 之间具有怎样的关系？如何用语言来表述这种关系？

(1) $A=\{-1, 1\}$, $B=\{-1, 0, 1, 2\}$；

(2) $A=\mathbf{N}$, $B=\mathbf{R}$；

(3) $A=\{x \mid x$ 为北京人$\}$, $B=\{x \mid x$ 为中国人$\}$.

上述每组中的集合 A,B 具有的关系可以用子集的概念来表述.

如果集合 A 的任意一个元素都是集合 B 的元素（若 $a\in A$ 则$a\in B$)，则称集合 A 为集合B 的**子集**(subset)，记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$，读作“集合 A 包含于集合 B” 或“集合 B 包含集合 A”.

例如，$\{1, 2, 3\}\subseteq\mathbf{N}$，$\mathbf{N}\subseteq\mathbf{R}$，$\{x \mid x$ 为北京人$\}\subseteq\{x \mid x$ 为中国人$\}$ 等. $A\subseteq B$ 可以用 Venn 图来表示(图 1-2-1).

B A

根据子集的定义，我们知道$A\subseteq A$. 也就是说，任何一个集合是它本身的子集. 对于空集 $\varnothing$，我们规定 $\varnothing\subseteq A$，即

.

$A\subseteq B$ 与 $B\subseteq A$ 能否同时成立？

写出集合$\{a, b\}$的所有子集.

集合$\{a, b\}$的所有子集是$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{a, b\}$.

如果 $A\subseteq B$，并且 $A\neq B$，这时集合 A 称为集合 B 的(proper set)，记为 $A\subsetneqq B$ 或 $B\supsetneqq A$，读作“A 真包含于B” 或“B 真包含 A”，如$\{a\}\subsetneqq\{a, b\}$.

下列各组的三个集合中，哪两个集合之间具有包含关系？

S

A B

(1) $S=\{-2, -1, 1, 2\}$，$A=\{-1, 1\}$，$B=\{-2, 2\}$；

(2) $S=\mathbf{R}$，$A=\{x \mid x\leqslant 0, x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x \mid x>0, x\in\mathbf{R}\}$；

(3) $S=\{x \mid x$ 为地球人$\}$，$A=\{x \mid x$ 为中国人$\}$，$B=\{x \mid x$ 为外国人$\}$.

在(1)、(2)、(3)中都有 $A\subsetneqq S$，$B\subsetneqq S$，可以用图 1-2-2 来

表示.

观察例 2 中每一组的三个集合,它们之间还有一种什么关系?

设 $A \subseteq S$,由 S 中不属于 A 的所有元素组成的集合称为 S 的子集 A 的**补集**(complementary set),记为 $\complement_S A$(读作"A 在 S 中的补集"),即

$$\complement_S A = \{x \mid x \in S, 且\ x \notin A\}.$$

S

A

$\complement_S A$ 可用图1-2-3中的阴影部分来表示.

对于例 2,我们有

$$B = \complement_S A,\ A = \complement_S B.$$

如果集合 S 包含我们所要研究的各个集合,这时 S 可以看做一个 (universal set),全集通常记作 U.

例如,在实数范围内讨论集合时,$\mathbf{R}$ 便可看做一个全集 U.

不等式组 $\begin{cases} 2x-1>0, \\ 3x-6 \leqslant 0 \end{cases}$ 的解集为 A,$U=\mathbf{R}$,试求 A 及 $\complement_U A$,并把它们分别表示在数轴上.

$$A = \{x \mid 2x-1>0, 且\ 3x-6 \leqslant 0\} = \left\{x \middle| \frac{1}{2} < x \leqslant 2\right\},$$

$\complement_U A = \left\{x \middle| x \leqslant \frac{1}{2}, 或\ x > 2\right\}$,在数轴上分别表示如下.

$\frac{1}{2}$ 2 x

(1)

$\frac{1}{2}$ 2 x

(2)

1. 写出集合$\{1, 2, 3\}$的所有子集.

2. $\complement_U A$ 在 U 中的补集等于什么?

3. 判断下列表示是否正确:

(1) $a \subseteq \{a\}$; (2) $\{a\} \in \{a, b\}$;

(3) $\{a, b\} \subseteq \{b, a\}$; (4) $\{-1, 1\} \subsetneqq \{-1, 0, 1\}$;

(5) $\varnothing \subsetneqq \{-1, 1\}$.

4. 若 $U=\mathbf{Z}$, $A=\{x \mid x=2k, k \in \mathbf{Z}\}$, $B=\{x \mid x=2k+1, k \in \mathbf{Z}\}$,则 $\complement_U A =$ __________, $\complement_U B =$ __________.

C B A

1. 如图,试说明集合 A, B, C 之间有什么包含关系.

2. 指出下列各组中 集合 A 与 B 之间的关系.

(1) $A=\{-1, 1\}$, $B=\mathbf{Z}$;

(2) $A=\{1, 3, 5, 15\}$, $B=\{x \mid x$ 是 15 的正约数$\}$;

(3) $A=\mathbf{N}^*$, $B=\mathbf{N}$.

3. $U=\{x \mid x$是至少有一组对边平行的四边形$\}$,$A=\{x \mid x$是平行四边形$\}$,求 $\complement_U A$.

4. (1) 已知$U=\{1, 2, 3, 4\}$, $A=\{1, 3\}$,求 $\complement_U A$;

(2) 已知$U=\{1, 3\}$, $A=\{1, 3\}$,求 $\complement_U A$.

5. 如果数集$\{0, 1, x+2\}$中有 3 个元素,那么 x 不能取哪些值?

6. (阅读题)一位渔民非常喜欢数学,但他怎么也想不明白集合的意义. 于是,他请教数学家:“尊敬的先生,请你告诉我,集合是什么?”集合是不定义的概念,数学家很难回答那位渔民.

有一天,他来到渔民的船上,看到渔民撒下鱼网,轻轻一拉,许多鱼虾在网中跳动.

数学家非常激动,高兴地告诉渔民:“这就是集合!”

你能理解数学家的话吗?

交集、并集

A 在 S 中的补集 $\complement_S A$ 是由给定的两个集合 A,S 得到的一个新集合. 这种由两个给定集合得到一个新集合的过程称为集合的运算. 其实,由两个集合(或几个集合)得到一个新集合的方式有很多,集合的交与并就是常见的两种集合运算.

用 Venn 图分别表示下列各组中的三个集合:

(1) $A=\{-1, 1, 2, 3\}$, $B=\{-2, -1, 1\}$, $C=\{-1, 1\}$;

(2) $A=\{x \mid x \leqslant 3\}$, $B=\{x \mid x>0\}$, $C=\{x \mid 0<x \leqslant 3\}$;

(3) $A=\{x \mid x$ 为高一(1)班语文测验优秀者$\}$,$B=\{x \mid x$ 为高一(1)班英语测验优秀者$\}$,$C=\{x \mid x$ 为高一(1)班语文、英语两门测验都优秀者$\}$.

上述每组集合中,A, B, C 之间都具有怎样的关系?

容易看出,集合 C 中的每一元素既在集合 A 中,又在集合 B 中.

一般地,由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素构成的集合,称为 A 与 B 的**交集**(intersection set),记作 $A \cap B$(读作"A 交 B"),即

$$A \cap B=\{x \mid x \in A, 且\ x \in B\}.$$

U

$A \cap B$

$A \cap B$ 可用图 1-3-1 中的阴影部分来表示.

显然有

$$A \cap B=B \cap A,\ A \cap B \subseteq A,\ A \cap B \subseteq B.$$

$A \cap B=A$ 可能成立吗?$A \cap B=\varnothing$ 可能成立吗?

交集 $A \cap B$ 是由给定的两个集合 A,B 经过"运算"而得到的新集合,这种运算称为"交". 而另一种集合间称为"并" 的运算也十分常见,其意义如下:

一般地,由所有属于集合 A 或者属于集合 B 的元素构成的集合,称为 A 与 B 的**并集**(union set),记作 $A \cup B$(读作"A 并 B"),即

$$A \cup B=\{x \mid x \in A, 或\ x \in B\}.$$

U

$A \cup B$

$A \cup B$ 可用图 1－3－2 中的阴影部分来表示.

显然有

$$A \cup B = B \cup A,\ A \subseteq A \cup B,\ B \subseteq A \cup B.$$

$A \cup B = A$ 可能成立吗？$A \cup \complement_U A$ 是什么集合？

设 $A=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $B=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$,求 $A \cap B$ 和 $A \cup B$.

$A \cap B=\{-1,\ 0,\ 1\} \cap \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}=\{0,\ 1\}$,

$A \cup B=\{-1,\ 0,\ 1\} \cup \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}=\{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$.

学校举办了排球赛,某班 45 名同学中有 12 名同学参赛. 后来又举办了田径赛,这个班有 20 名同学参赛. 已知两项都参赛的有 6 名同学. 两项比赛中,这个班共有多少名同学没有参加过比赛?

设 $A=\{x \mid x$ 为参加排球赛的同学$\}$,$B=\{x \mid x$ 为参加田径赛的同学$\}$,则 $A \cap B=\{x \mid x$ 为参加两次比赛的同学$\}$.

A　B

(6)　(6)　(14)

画出 Venn 图(图 1－3－3),可知没有参加过比赛的同学有

$$45-(12+20-6)=19(\text{名}).$$

这个班共有 19 名同学没有参加过比赛.

设 $A=\{x \mid x>0\}$, $B=\{x \mid x \leqslant 1\}$,求 $A \cap B$ 和 $A \cup B$.

$A \cap B=\{x \mid x>0\} \cap \{x \mid x \leqslant 1\}=\{x \mid 0<x \leqslant 1\}$,

$A \cup B=\{x \mid x>0\} \cup \{x \mid x \leqslant 1\}=\mathbf{R}$.

为了叙述方便,在以后的学习中,我们常常会用到区间的概念. 设 $a,\ b \in \mathbf{R}$,且 $a<b$,规定

$$[a,\ b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\},$$

$$(a,\ b)=\{x \mid a<x<b\},$$

$$[a,\ b)=\{x \mid a \leqslant x<b\},$$

$$(a,\ b]=\{x \mid a<x \leqslant b\},$$

$$(a,\ +\infty)=\{x \mid x>a\},$$

$$(-\infty,\ b)=\{x \mid x<b\},$$

$$(-\infty,\ +\infty)=\mathbf{R}.$$

$[a,\ b]$, $(a,\ b)$ 分别叫做闭区间、开区间;$[a,\ b)$, $(a,\ b]$ 叫做半开半闭区间; a, b 叫做相应区间的端点.

你能在数轴上表示上述各区间吗?

1. 设 U 为全集,集合 A 为 U 的子集,则
$A \cap A =$ ________，　$A \cup A =$ ________，　$A \cap \varnothing =$ ________，
$A \cup \varnothing =$ ________，　$A \cap \complement_U A =$ ________，$A \cup \complement_U A =$ ________.
2. 设 $A=\{x \mid x \geqslant 0\}$, $B=\{x \mid x \leqslant 0\}$,求 $A \cap B$ 和 $A \cup B$.
3. 设 $A=\{(x, y) \mid y=-4x+6\}$, $B=\{(x, y) \mid y=5x-3\}$,求 $A \cap B$.
4. 设 $A=\{x \mid x=2k+1, k \in \mathbf{Z}\}$, $B=\{x \mid x=2k-1, k \in \mathbf{Z}\}$, $C=\{x \mid x=2k, k \in \mathbf{Z}\}$,求 $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cup C$, $A \cup B$.

1. 填表:

$\cap$	$\varnothing$	A	B	$\cup$	$\varnothing$	A	B
$\varnothing$				$\varnothing$			
A			$A \cap B$	A			
B				B		$B \cup A$	

$\cap$	$\varnothing$	A	$\complement_U A$	$\cup$	$\varnothing$	A	$\complement_U A$
$\varnothing$				$\varnothing$			
A				A			
$\complement_U A$				$\complement_U A$			

2. 设 $A=(-1, 3]$, $B=[2, 4)$,求 $A \cap B$.
3. 设 $A=(0, 1]$, $B=\{0\}$,求 $A \cup B$.
4. 设 $A=\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$, $B=\{6, 12, 18, 24\}$.
(1) $B \subseteq A$ 成立吗?$A \subseteq B$ 成立吗?
(2) 求 $A \cap B$ 和 $A \cup B$.
5. 在平面内,设 A, B, O 为定点,P 为动点,则下列集合表示什么图形?
(1) $\{P \mid PA=PB\}$;　　(2) $\{P \mid PO=1\}$.
6. 某商店进了两次货,第一次进的是圆珠笔、钢笔、铅笔、笔记本、方便面、火腿肠,第二次进的是铅笔、方便面、汽水、火腿肠. 用集合表示这两次进货的种类.
7. 写出阴影部分所表示的集合.

U
A　B

(1)

U
A　B
C

(2)

8. (1) $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A=\{2, 3, 5\}$, $B=\{1, 4\}$,求 $\complement_U(A \cup B)$ 与 $(\complement_U A) \cap (\complement_U B)$;

(2) 在下图中用阴影表示 $\complement_U(A\cup B)$ 与 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

U A B　　U A B

(3) 由(1)、(2),你有什么发现?

9. 一个集合的所有子集共有 n 个,n 可以取 0, 1, 2, 3, 4, 5 这六个数中的哪几个数?

10. 设 A,B 均为有限集,A 中元素的个数为 m,B 中元素的个数为 n,$A\cup B$ 中元素的个数为 s,下列各式能成立吗?

(1) $m+n>s$;

(2) $m+n=s$;

(3) $m+n<s$.

11. (阅读题)我们知道,如果集合 $A\subseteq S$,那么 S 的子集 A 的补集为 $\complement_S A=\{x\mid x\in S$, 且 $x\notin A\}$. 类似地,对于集合 A, B,我们把集合 $\{x\mid x\in A$,且 $x\notin B\}$ 叫做集合 A 与 B 的差集,记作 $A-B$. 例如,$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{4, 5, 6, 7, 8\}$,则有 $A-B=\{1, 2, 3\}$, $B-A=\{6, 7, 8\}$.

据此,试回答下列问题:

(1) S 是高一(1) 班全体同学的集合,A 是高一(1) 班全体女同学的集合,求 $S-A$ 及 $\complement_S A$;

(2) 在下列各图中用阴影表示集合 $A-B$;

(3) 如果 $A-B=\varnothing$,那么集合 A 与 B 之间具有怎样的关系?

U A B　　U A B　　U A B

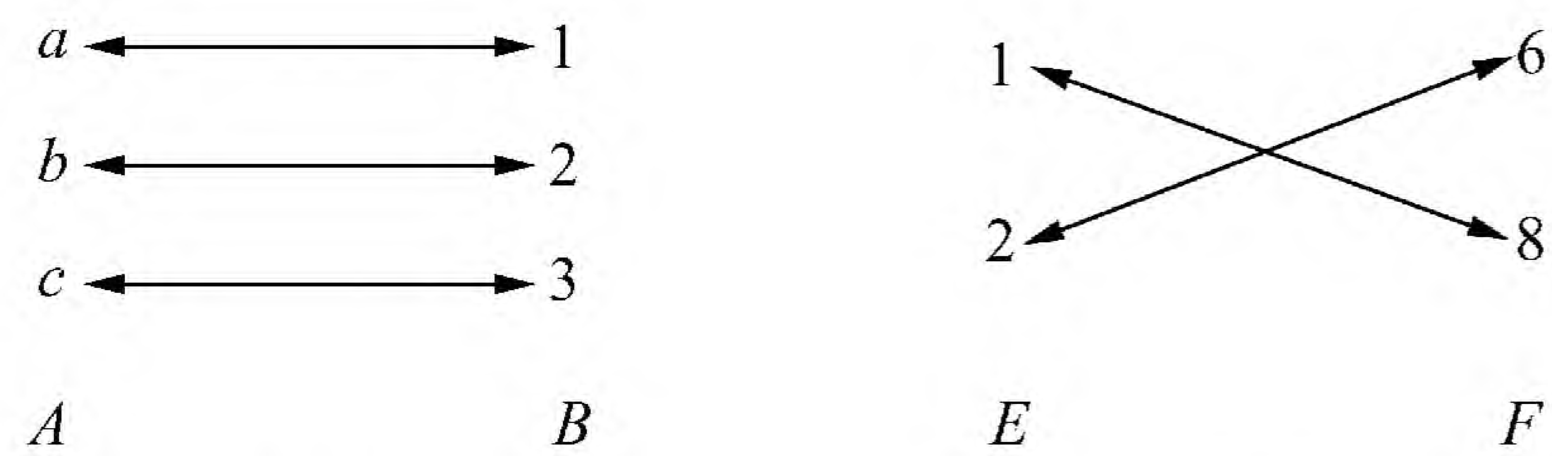
有限集与无限集

在本章第 1.1 节中,我们曾讨论过有限集和无限集. 例如,{1, 2, 3}是有限集,$\mathbf{N}^*$ 是无限集.

对于有限集合 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{a, b\}$, $C=\{a, b, c\}$,我们知道集合 A 的元素比集合 B 的元素多,A 与 C 的元素一样多. 然而,对于两个无限集合 $\mathbf{N}^*=\{1, 2, 3, \cdots\}$, $\mathbf{N}=\{0, 1, 2, \cdots\}$,你能判断哪一个集合的元素更多吗?

德国数学家康托尔根据人们在计数时运用的“一一对应”思想给出了两个集合“等势”的概念:若两个无限集的元素之间能建立起一一对应,则称这两个集合等势.

先看有限集之间的“一一对应”. 教室里有 45 个座位，老师走进教室，一看坐满了人，他无需一个个地点数，即知听课人数为 45，这是因为每个人坐一个座位，且每个座位上都坐一个人，两者成一一对应，从而听课人数与座位数一样多. 下面的图 1－3－4 也清楚地表明，元素之间有一一对应关系的两个集合，其元素个数一样多.



(1)　　(2)

回到 $\mathbf{N}^*$ 与 $\mathbf{N}$ 这两个无限集中，我们也可以建立两者之间的一一对应，如

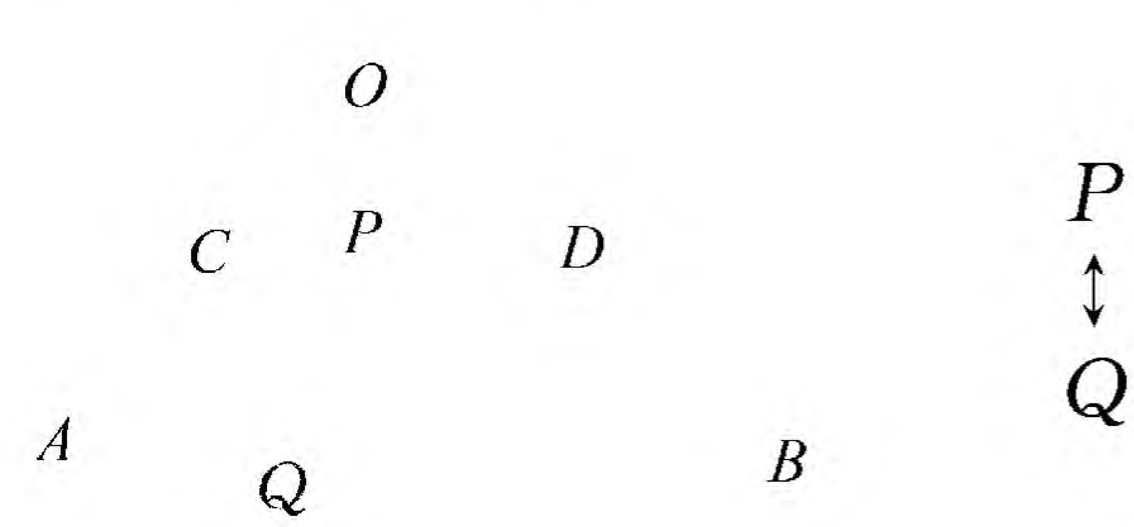
$$\begin{array}{c}\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\}\\ \updownarrow\quad\updownarrow\quad\updownarrow\quad\updownarrow\\ \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}\end{array}$$

于是，$\mathbf{N}^*$ 与 $\mathbf{N}$ 等势. 通俗地说，它们的元素“一样多”！

从下面的一一对应中，你能得到什么结论？

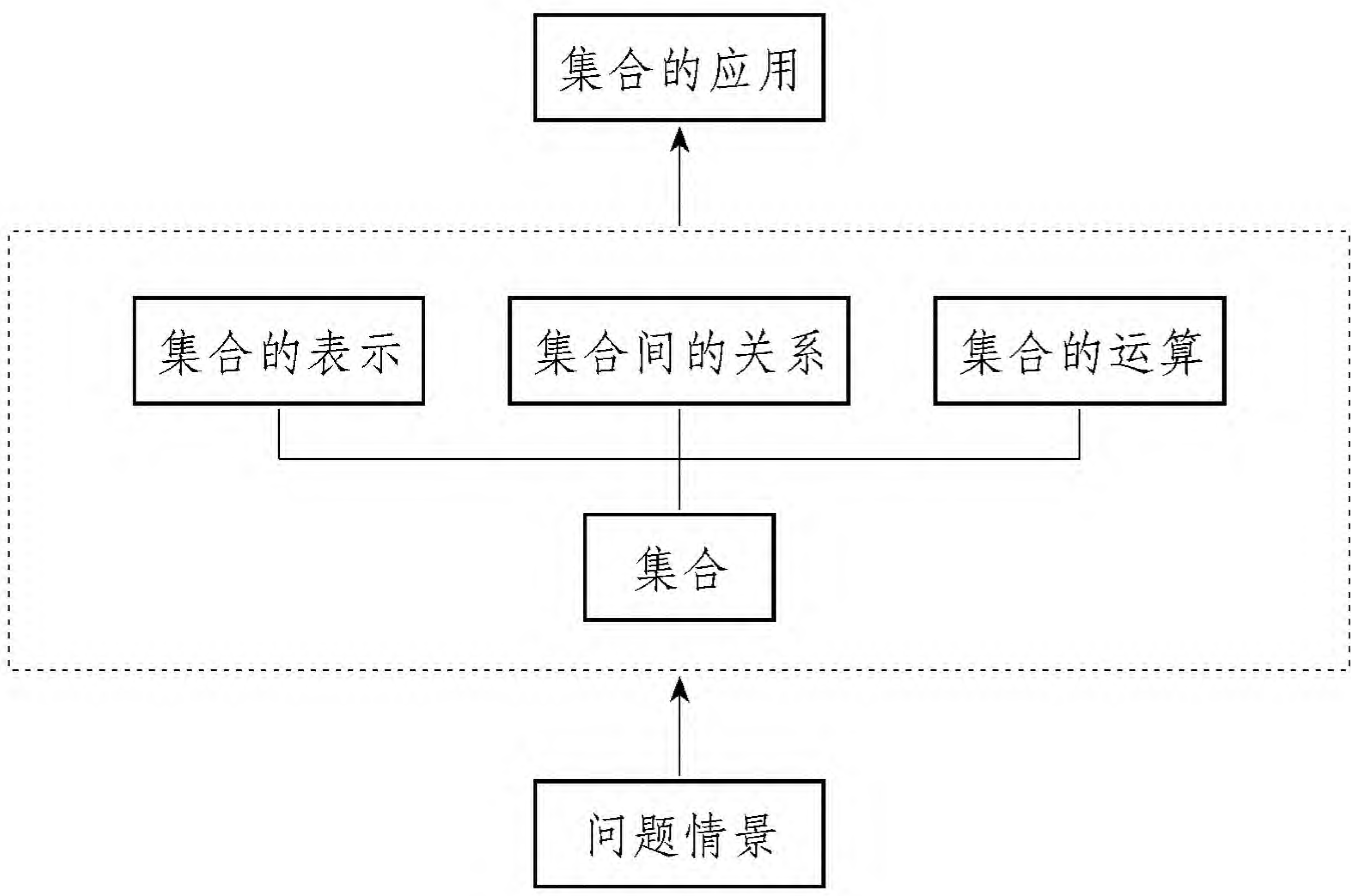
$$\begin{array}{cc}\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \cdots\} & n\\ \updownarrow\quad\updownarrow\quad\updownarrow\quad\updownarrow\quad\updownarrow\quad\updownarrow & \updownarrow\\ \{2,\ 4,\ 6,\ 8,10,12,\ \cdots\} & 2n\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots\} & n\\ \updownarrow\quad\updownarrow\quad\updownarrow\quad\updownarrow\quad\updownarrow & \updownarrow\\ \{1^2,2^2,3^2,4^2,5^2,\ \cdots\} & n^2\end{array}$$



本章回顾

本章主要学习了集合的初步知识，包括集合的有关概念、集合的表示、集合之间的关系及集合的运算等.



我们从生活中的实例出发，探索用集合语言来描述数学对象的方法. 应用集合语言，可以更为清晰地表达我们的思想. 集合是整个数学的基础，它在以后的学习中有着极为广泛的应用.

1. 判断下列对象能否构成一个集合，如果能，请采用适当的方法表示该集合；如不能，请说明理由：
(1) 小于 5 的自然数；
(2) 著名数学家；
(3) 高一(1)班身材高的同学；
(4) 高一(1)班体重不低于 50 kg 的同学.
2. 判断下列集合是有限集还是无限集：
(1) $A=\left\{x \middle| \; |x|<10,\ x\in \mathbf{Z}\right\}$；
(2) $\left\{x \mid x=\dfrac{n}{n+1},\ n\in \mathbf{N}\right\}$；
(3) $S=\{P \mid AP+PB=AB\}$(A,B 为平面上两个不同的定点，P 为动点).
3. 已知集合 $A=[1,\ 4)$，$B=(-\infty,\ a)$，若 $A\subsetneqq B$，求实数 a 的取值范围.
4. 已知集合 $A=[-1,\ 2)$，对于下列全集 U 分别求 $\complement_U A$：
(1) $U=\mathbf{R}$；　　(2) $U=(-\infty,\ 3]$；
(3) $U=[-2,\ 2]$；　　(4) $U=[-1,\ 2)$.
5. 求满足 $\{1,\ 3\}\cup A=\{1,\ 3,\ 5\}$ 的集合 A.

6. 试用 Venn 图表示集合 U，A，B，使得 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$，$A\cup B=U$，$A\cap B\neq\varnothing$，$A\cap \complement_U B=\{1,\ 2,\ 3\}$.
7. 期中考试，某班数学优秀率为 70%，语文优秀率为 75%. 问：上述两门学科都优秀的百分率至少为多少？
8. 利用 Venn 图，探求 $\complement_U(A\cap B)$，$\complement_U A$，$\complement_U B$ 三者之间的关系.

9. (阅读题)对于集合 A，B，我们把集合 $\{(a,\ b) \mid a\in A,\ b\in B\}$ 记作 $A\times B$. 例如，$A=\{1,\ 2\}$，$B=\{3,\ 4\}$，则有
$$A\times B=\{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4)\},$$
$$B\times A=\{(3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1),\ (4,\ 2)\},$$
$$A\times A=\{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2)\},$$
$$B\times B=\{(3,\ 3),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (4,\ 4)\}.$$
据此，试解答下列问题：
(1) 已知 $C=\{a\}$，$D=\{1,\ 2,\ 3\}$，求 $C\times D$；
(2) 已知 $A\times B=\{(1,\ 2),\ (2,\ 2)\}$，求集合 A，B；
(3) 若 A 有 3 个元素，B 有 4 个元素，试确定 $A\times B$ 有几个元素.
10. (写作题)用集合的语言介绍你自己.

第 2 章　函数概念与基本初等函数 Ⅰ

- 函数概念与基本初等函数Ⅰ
  - 函数的概念和图象
    - 函数的概念和图象
    - 函数的表示方法
    - 函数的简单性质
    - 映射的概念
  - 指数函数
    - 分数指数幂
    - 指数函数
  - 对数函数
    - 对数
    - 对数函数
  - 幂函数
  - 函数与方程
    - 二次函数与一元二次方程
    - 用二分法求方程的近似解
  - 函数模型及其应用
  - 探究案例 钢琴与指数曲线
  - 实习作业

数学中的转折点是笛卡儿的变数. 有了变数，运动就进入了数学；有了变数，辩证法进入了数学.

—— 恩格斯

函数概念是近代数学思想之花.

——托马斯

事物都是运动变化着的，我们可以感受到它们的变化.

早晨，太阳从东方冉冉升起；

气温随时间在悄悄地改变；

随着二氧化碳的大量排放，地球正在逐渐变暖；

中国的国内生产总值在逐年增长；

……

在这些变化着的现象中，都存在着两个变量. 当一个变量变化时，另一个变量随之发生变化.

怎样用数学模型刻画两个变量之间的关系？

这样的数学模型具有怎样的特征？

如何借助这样的模型来进一步描述和解释我们周围的世界呢？

函数的概念和图象

在初中，我们把函数看成是刻画和描述两个变量之间依赖关系的数学模型. 从本节开始，我们将进一步学习有关函数的知识.

在现实生活中，我们可能会遇到下列问题：

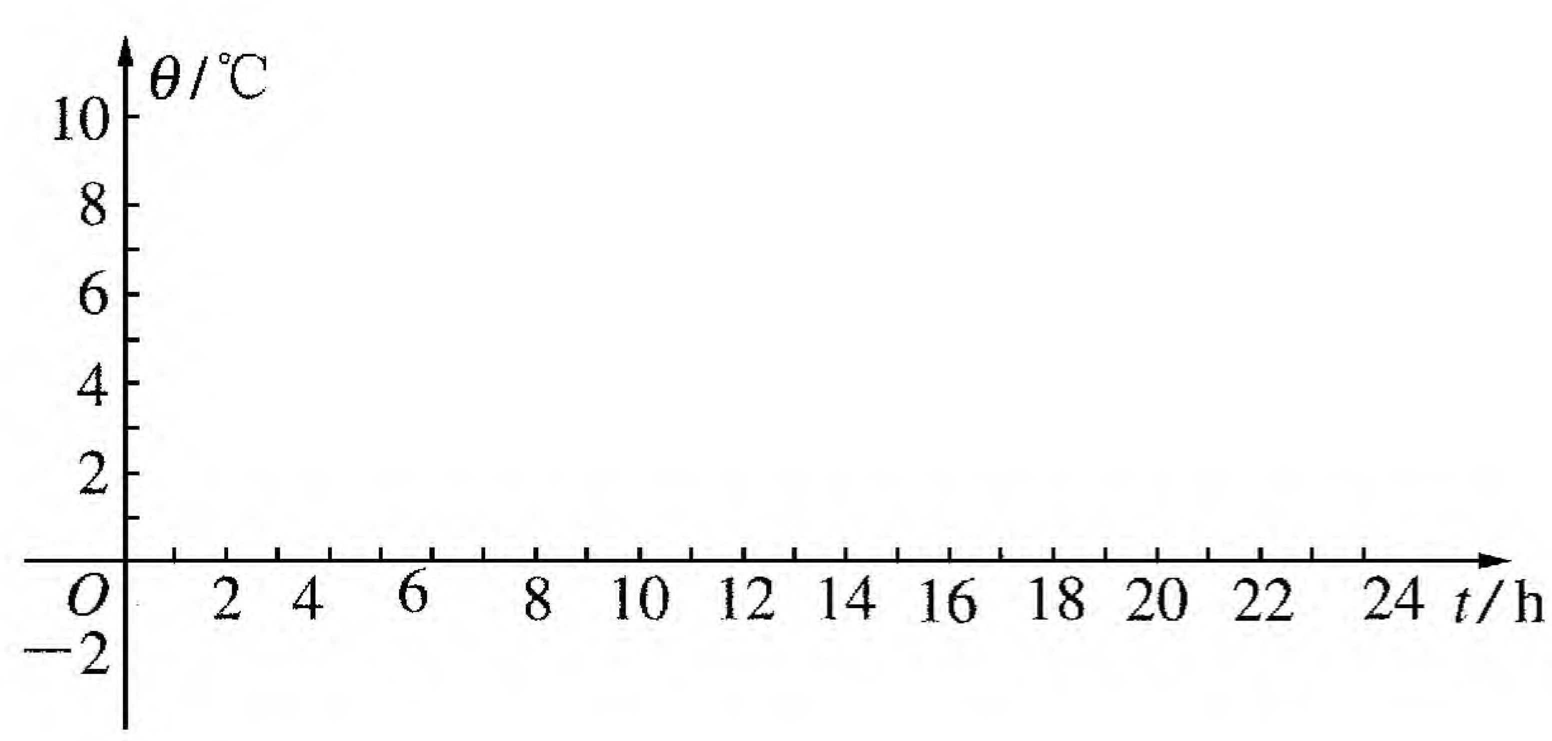
(1) 估计人口数量变化趋势是我们制定一系列相关政策的依据. 从人口统计年鉴中可以查得我国从 1949 年至 1999 年人口数据资料如表 2-1-1 所示，你能根据这个表说出我国人口的变化情况吗？

表 2-1-1　1949～1999 年我国人口数据表

年　　份	1949	1954	1959	1964	1969	1974	1979	1984	1989	1994	1999
人口数/百万	542	603	672	705	807	909	975	1 035	1 107	1 177	1 246

(2) 一物体从静止开始下落，下落的距离 y(m) 与下落时间 x(s) 之间近似地满足关系式 $y = 4.9x^2$. 若一物体下落 2 s，你能求出它下落的距离吗？

(3) 图 2-1-1 为某市一天 24 小时内的气温变化图.



(1) 上午 6 时的气温约是多少？全天的最高、最低气温分别是多少？

(2) 在什么时刻，气温为 0℃？

(3) 在什么时段内，气温在 0℃以上？

在上述的每个问题中都含有两个变量，当一个变量的取值确定后，另一个变量的值随之惟一确定. 根据初中学过的知识，每一个问题都涉及一个确定的函数. 这就是它们的共同特点.

如何用集合语言来阐述上述三个问题的共同特点？

每一个问题均涉及两个非空数集 A, B.

例如,在第一个问题中,一个集合 A 是由年份数组成,即

$$A=\{1949, 1954, 1959, 1964, 1969, 1974, 1979, 1984, 1989, 1994, 1999\};$$

另一个集合 B 是由人口数(百万人)组成,即

$$B=\{542, 603, 672, 705, 807, 909, 975, 1\,035, 1\,107, 1\,177, 1\,246\}.$$

存在某种对应法则,对于 A 中任意元素 x,B 中总有一个元素 y 与之对应.

例如,在第一个问题中,x(年份)取 1949,则 y(百万人)取 542. 这时,我们说“1949 对应到 542”,或者说“输入 1949,输出 542”,简记为

$$1949 \longrightarrow 542.$$

图 2-1-2 所示的“箭头图”可以清楚地表示这种对应关系,这种对应具有“一个输入值对应到惟一的输出值”的特征.

$$\begin{array}{rcl}
1949 & \longrightarrow & 542 \\
1954 & \longrightarrow & 603 \\
1959 & \longrightarrow & 672 \\
1964 & \longrightarrow & 705 \\
1969 & \longrightarrow & 807 \\
1974 & \longrightarrow & 909 \\
1979 & \longrightarrow & 975 \\
1984 & \longrightarrow & 1\,035 \\
1989 & \longrightarrow & 1\,107 \\
1994 & \longrightarrow & 1\,177 \\
1999 & \longrightarrow & 1\,246
\end{array}$$

一般地,设 A, B 是两个非空的数集,如果按某种对应法则 f,对于集合 A 中的每一个元素 x,在集合 B 中都有惟一的元素 y 和它对应,这样的对应叫做从 A 到 B 的一个**函数**(function),通常记为

$$y=f(x),\ x\in A.$$

其中,所有的输入值 x 组成的集合 A 叫做函数 $y=f(x)$ 的**定义域**(domain).

给定函数时要指明函数的定义域. 对于用解析式表示的函数,如果没有指明定义域,那么就认为函数的定义域是指使函数表达式有意义的输入值的集合.

判断下列对应是否为函数:

(1) $x \to \dfrac{2}{x}$, $x \neq 0$, $x \in \mathbf{R}$;

(2) $x \to y$,这里 $y^2 = x$, $x \in \mathbf{N}$, $y \in \mathbf{R}$.

(1) 对于任意一个非零实数 x, $\dfrac{2}{x}$被 x 惟一确定,所以当$x \neq 0$时 $x \to \dfrac{2}{x}$是函数,这个函数也可以表示为 $f(x) = \dfrac{2}{x}$ $(x \neq 0)$.

(2) 考虑输入值为 4,即当 $x = 4$ 时输出值 y 由 $y^2 = 4$ 给出,得 $y = 2$ 和 $y = -2$. 这里一个输入值与两个输出值对应(不是单值对应),所以,$x \to y$($y^2 = x$)不是函数.

求下列函数的定义域:

(1) $f(x) = \sqrt{x-1}$;　　　(2) $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

(1) 因为当 $x - 1 \geqslant 0$ 时,即 $x \geqslant 1$ 时, $\sqrt{x-1}$ 有意义;当 $x - 1 < 0$ 时,即 $x < 1$ 时,$\sqrt{x-1}$ 没有意义,所以这个函数的定义域是$\{x \mid x \geqslant 1\}$.

(2) 因为当 $x + 1 \neq 0$ 时,即 $x \neq -1$ 时, $\dfrac{1}{x+1}$ 有意义;当 $x+1=0$时,即 $x = -1$ 时,$\dfrac{1}{x+1}$没有意义,所以这个函数的定义域是$\{x \mid x \neq -1, 且\ x \in \mathbf{R}\}$.

$$x \downarrow f \downarrow y$$

若 A 是函数 $y = f(x)$ 的定义域,则对于 A 中的每一个 x,都有一个输出值 y 与之对应. 我们将所有输出值 y 组成的集合称为函数的　　(range).

试比较下列两个函数的定义域与值域:

(1) $f(x) = (x-1)^2 + 1$, $x \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}$;

(2) $f(x) = (x-1)^2 + 1$.

(1) 函数的定义域为$\{-1, 0, 1, 2, 3\}$,因为

$$f(-1) = [(-1) - 1]^2 + 1 = 5,$$

同理

$$f(0) = 2,\ f(1) = 1,\ f(2) = 2,\ f(3) = 5,$$

所以这个函数的值域为$\{1, 2, 5\}$.

(2) 函数的定义域为 $\mathbf{R}$,因为

$$(x-1)^2 + 1 \geqslant 1,$$

所以这个函数的值域为$\{y \mid y \geqslant 1\}$.

1. 某班级学号为 1～6 的学生参加数学测试的成绩如表所示，试将学号与成绩的对应关系用“箭头图”表示在下图中.

学　号	1	2	3	4	5	6
成　绩	80	75	79	80	98	80

1
2　　　　75
3　　　　79
4　　　　80
5　　　　98
6

2. 从甲地到乙地的火车票价为 80 元，儿童乘火车时，按照身高选择免票、半票或全票. 选购票种的规则如下表：

身高 h/m	购票款数/元
$h \leqslant 1.1$	0
$1.1 < h \leqslant 1.4$	40
$h > 1.4$	80

(1) 若儿童身高 h 为输入值，相应的购票钱款为输出值，则

$1.0 \to$ ________，

$1.3 \to$ ________，

$1.5 \to$ ________；

(2) 若购票钱款为输入值，儿童身高 h 为输出值，则

$0 \to$ ________，

$40 \to$ ________；

(3) 分别说明(1)、(2)中对应是否为“单值对应”.

3. 判断下列对应是否为集合 A 到集合 B 的函数：

(1) A 为正实数集，$B = \mathbf{R}$，对于任意的 $x \in A$，$x \to x$ 的算术平方根；

(2) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，$B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$，对于任意的 $x \in A$，$x \to 2x$.

4. 判断下列对应是否为函数：

(1) $x \longrightarrow -\frac{1}{2}x$，$x \in \mathbf{R}$；

(2) $x \longrightarrow y$，其中 $y = |x|$，$x \in \mathbf{R}$，$y \in \mathbf{R}$；

(3) $t \longrightarrow s$，其中 $s = t^2$，$t \in \mathbf{R}$，$s \in \mathbf{R}$；

(4) $x \longrightarrow y$，其中 y 为不大于 x 的最大整数，$x \in \mathbf{R}$，$y \in \mathbf{Z}$.

5. 若 $f(x) = x - x^2$，求 $f(0)$，$f(1)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f(n+1) - f(n)$.

6. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x) = 1 - 3x$；

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$；

(3) $f(x)=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{x}$.

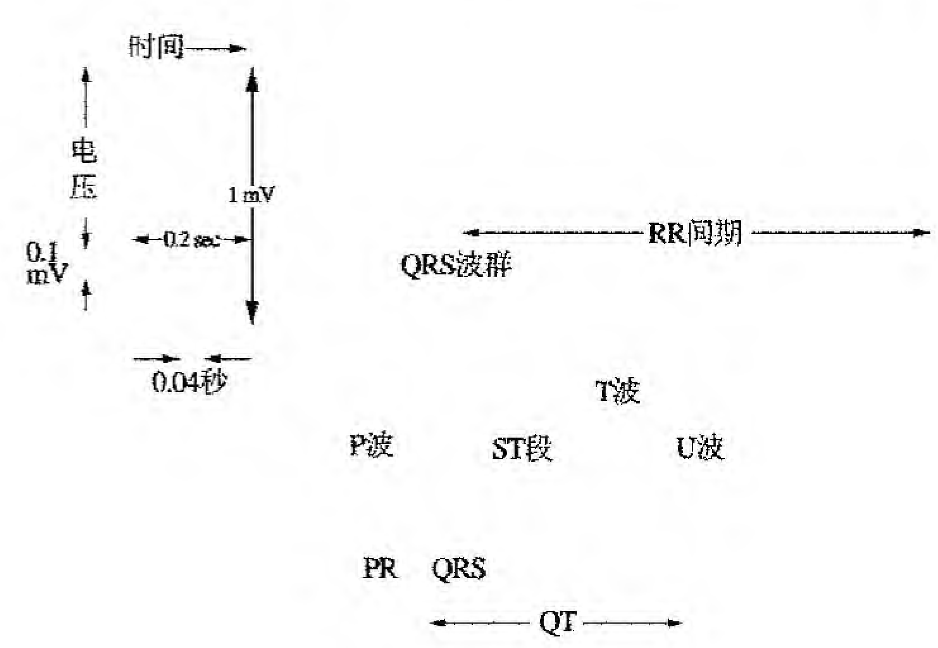
7. 求下列函数的值域：

(1) $f(x)=x^2+x$，$x\in\{1, 2, 3\}$；

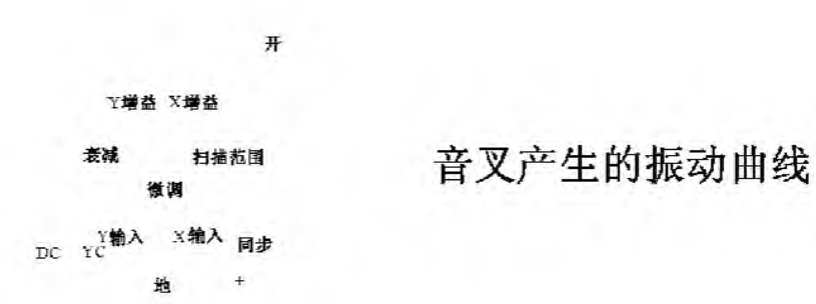
(2) $f(x)=(x-1)^2-1$；

(3) $f(x)=x+1$，$x\in(1, 2]$.

在初中，我们已学过函数的图象，并能作出函数 $y=2x-1$，$y=\dfrac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ 以及 $y=x^2$ 的图象. 社会生活中还有许多函数图象的例子，如图 2－1－3 所示的心电图、示波图等.



(1)



(2)

将自变量的一个值 x_0 作为横坐标，相应的函数值 $f(x_0)$ 作为纵坐标，就得到坐标平面上的一个点 $(x_0, f(x_0))$. 当自变量取遍函数定义域 A 中的每一个值时，就得到一系列这样的点. 所有这些点组成的集合(点集)为

$$\{(x, f(x))\mid x\in A\},$$

即

$$\{(x, y)\mid y=f(x), x\in A\},$$

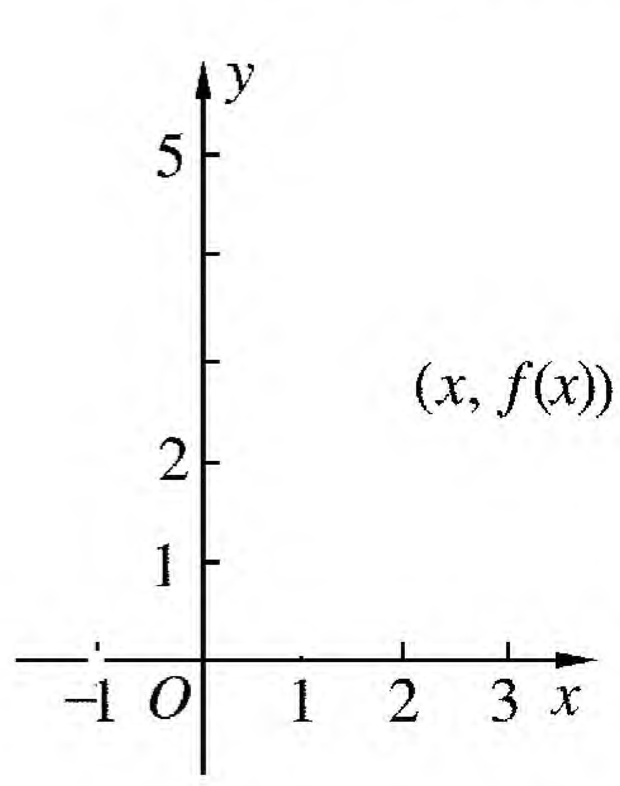
所有这些点组成的图形就是函数 $y=f(x)$ 的图象.

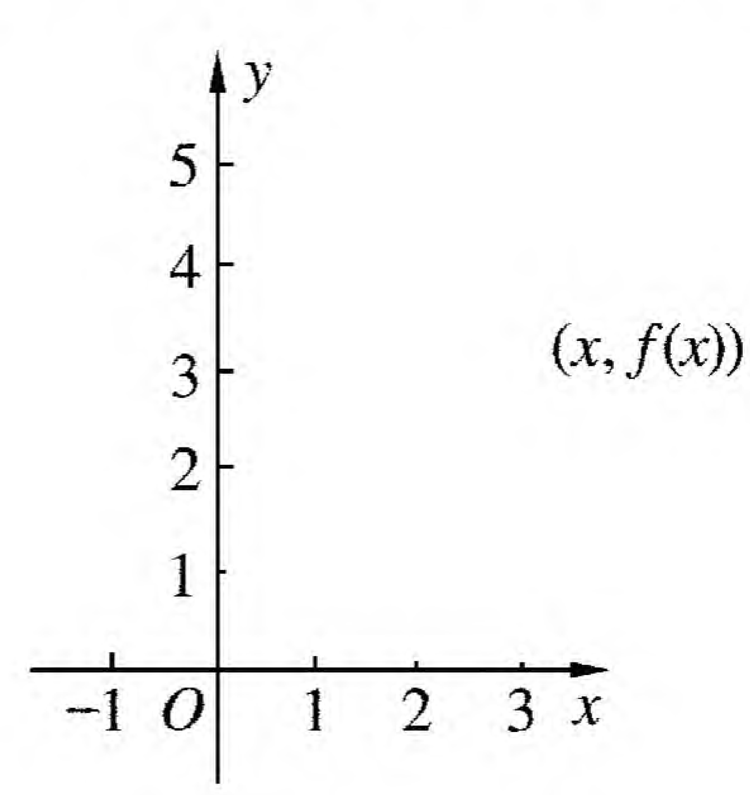
试画出下列函数的图象：

(1) $f(x)=x+1$；

(2) $f(x)=(x-1)^2+1$，$x\in[1, 3)$.

描点作出图象，则函数图象如图 2－1－4 和 2－1－5 所示.

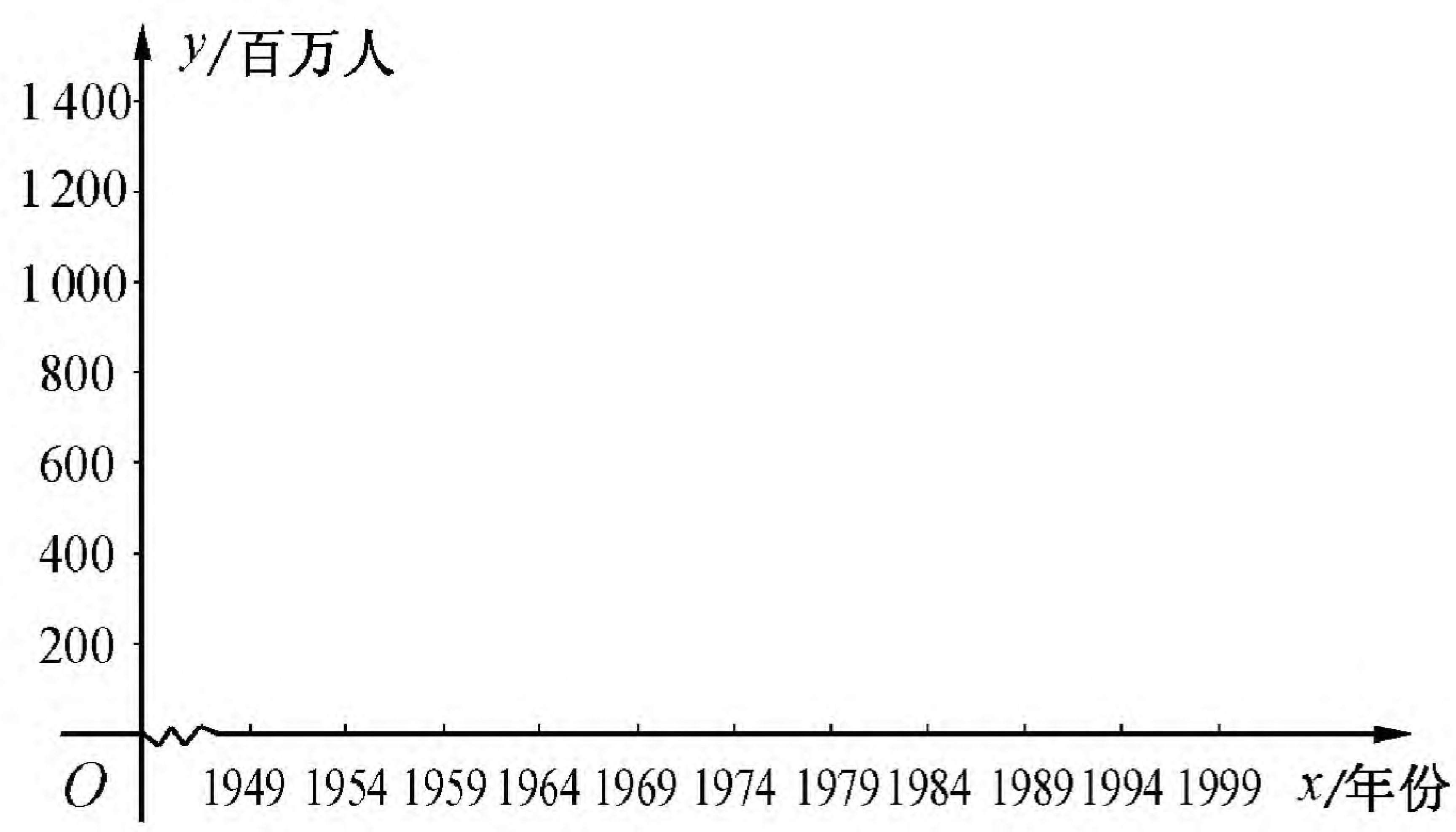




函数 $f(x)=(x-1)^2+1\ (x\in[1,3))$ 的图象为函数 $g(x)=(x-1)^2+1, x\in\mathbf{R}$ 的图象上 $x\in[1,3)$ 的一段.其中,点(1, 1)在图象上,用实心点表示,而点(3, 5)不在图象上,用空心点表示.

在第 2.1.1 节开头的第一个问题中,如果把人口数 y(百万人)看做是年份 x 的函数,试根据表 2-1-1,画出这个函数的图象.

由表 2-1-1 的数据,画出的函数图象是 11 个点,如图 2-1-6 所示.



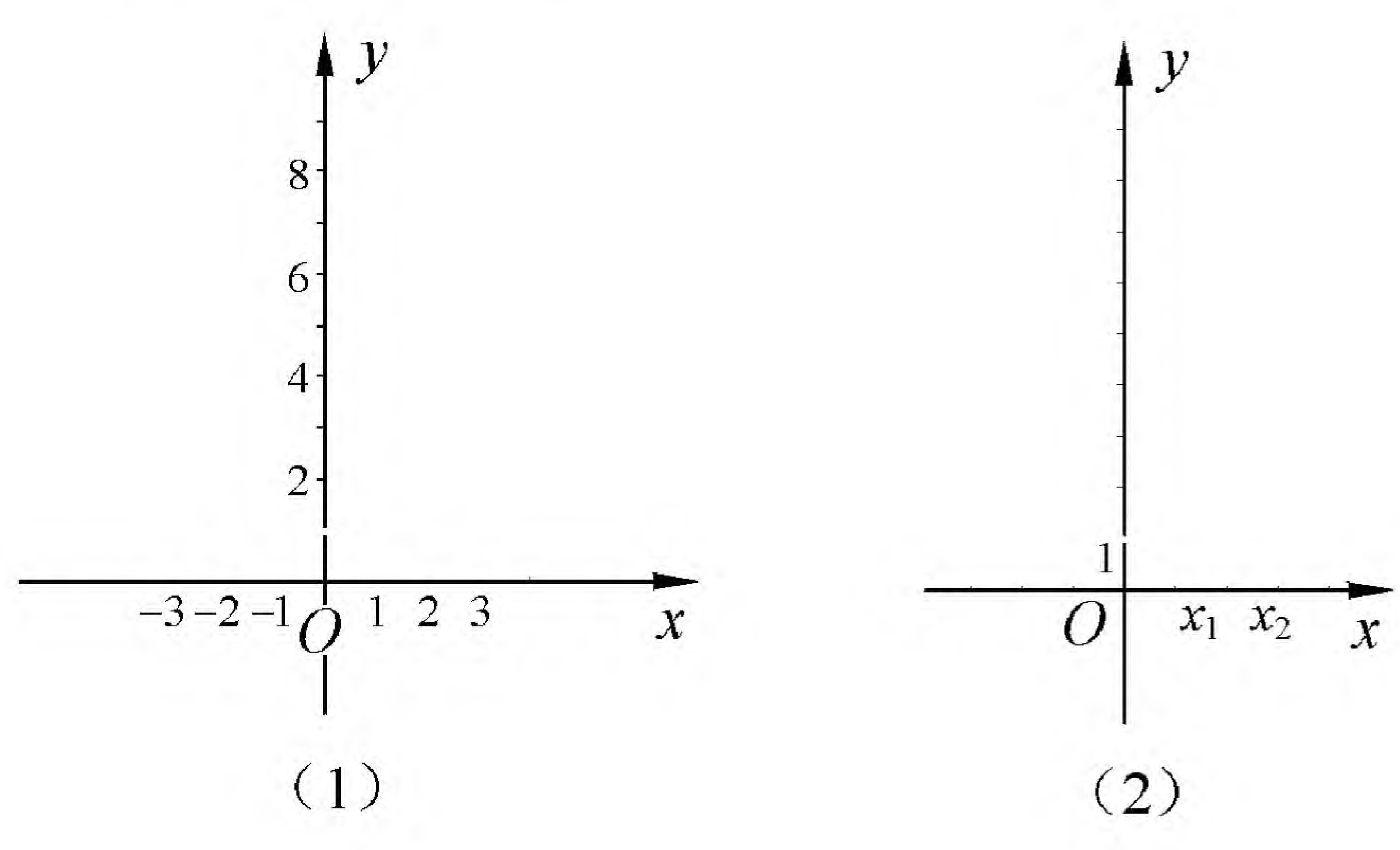
设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 A,则集合 $P=\{(x, y)\mid y=f(x), x\in A\}$ 与 $Q=\{y\mid y=f(x), x\in A\}$ 相等吗?请说明理由.

试画出函数 $f(x)=x^2+1$ 的图象,并根据图象回答下列问题:

(1) 比较 $f(-2)$, $f(1)$, $f(3)$ 的大小;

(2) 若 $0<x_1<x_2$,试比较 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小.

函数图象如图 2-1-7.



(1) 根据图 2-1-7(1),容易发现

$$f(-2)=f(2),$$

$$f(1) < f(2) < f(3),$$

所以

$$f(1) < f(-2) < f(3).$$

(2) 根据 2-1-7(2)的图象所示,容易发现当 $0 < x_1 < x_2$ 时,

$$f(x_1) < f(x_2).$$

在例 6(2)中,

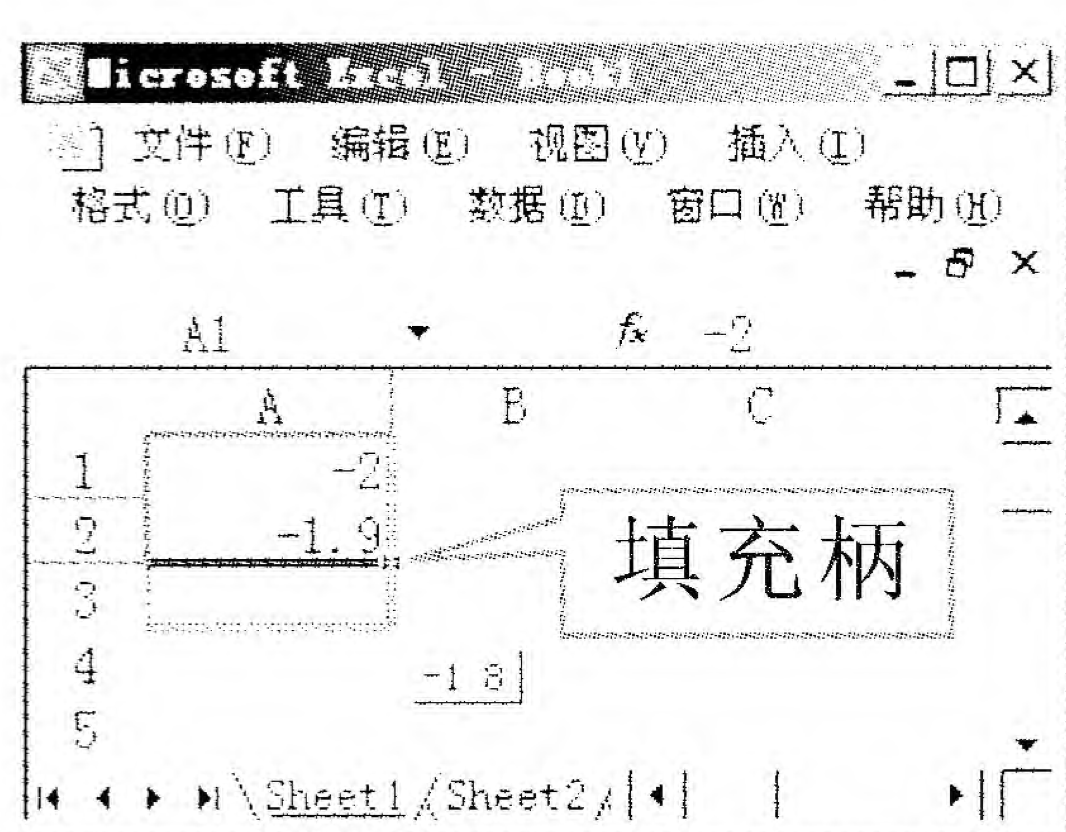
(1) 如果把"$0 < x_1 < x_2$"改为"$x_1 < x_2 < 0$",那么 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 哪个大?

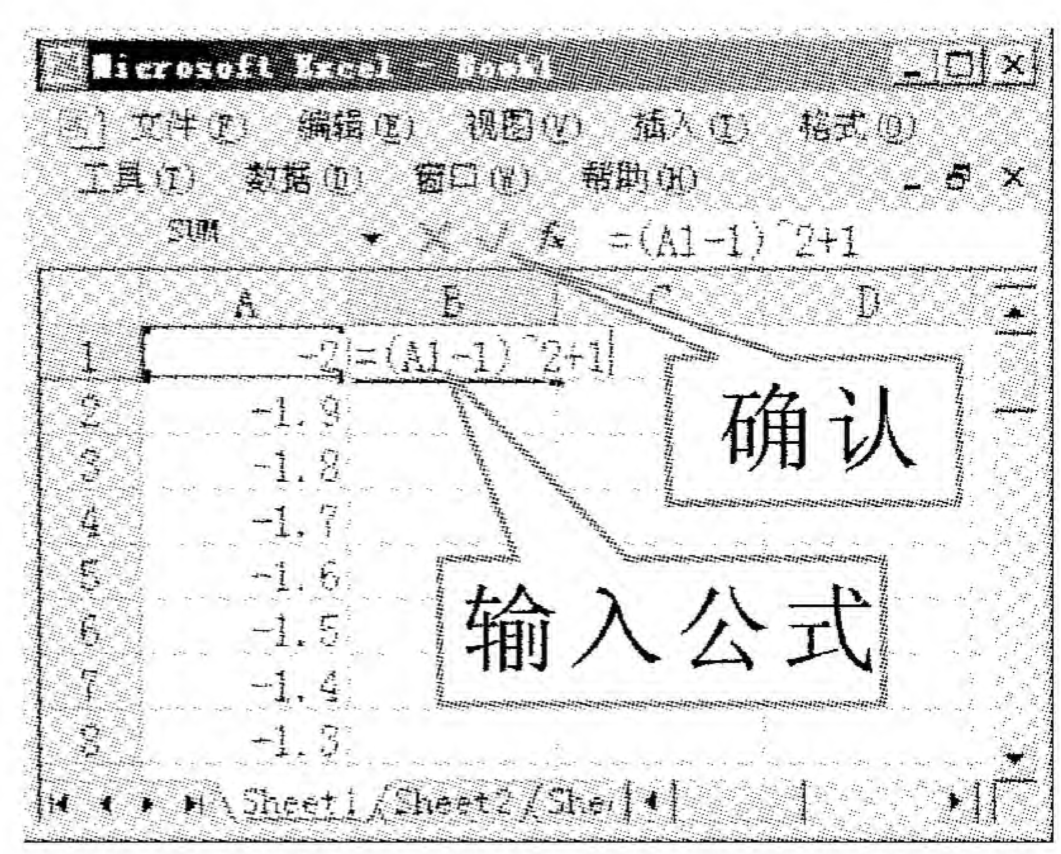
(2) 如果把"$0 < x_1 < x_2$"改为"$|x_1| < |x_2|$",那么 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 哪个大?

Excel 是 Microsoft Office 大家族中的一员,是集文字、数据、图形、图表以及其他媒体对象于一体的流行软件,它操作简便,是我们开展数学探究活动的一个得力助手.

下面我们介绍在 Excel 工作表中绘制函数 $f(x)=(x-1)^2+1$ 图象的方法,不妨作 $x\in[-2, 2]$上的图象.

(1) 工作表的第一列输入自变量的值:在单元格 A1,A2 内分别输入-2,-1.9,选中这两个单元格后,按住鼠标左键并向下方拖曳"填充柄",如图 2-1-8,直到单元格内出现填充值 2 时为止;



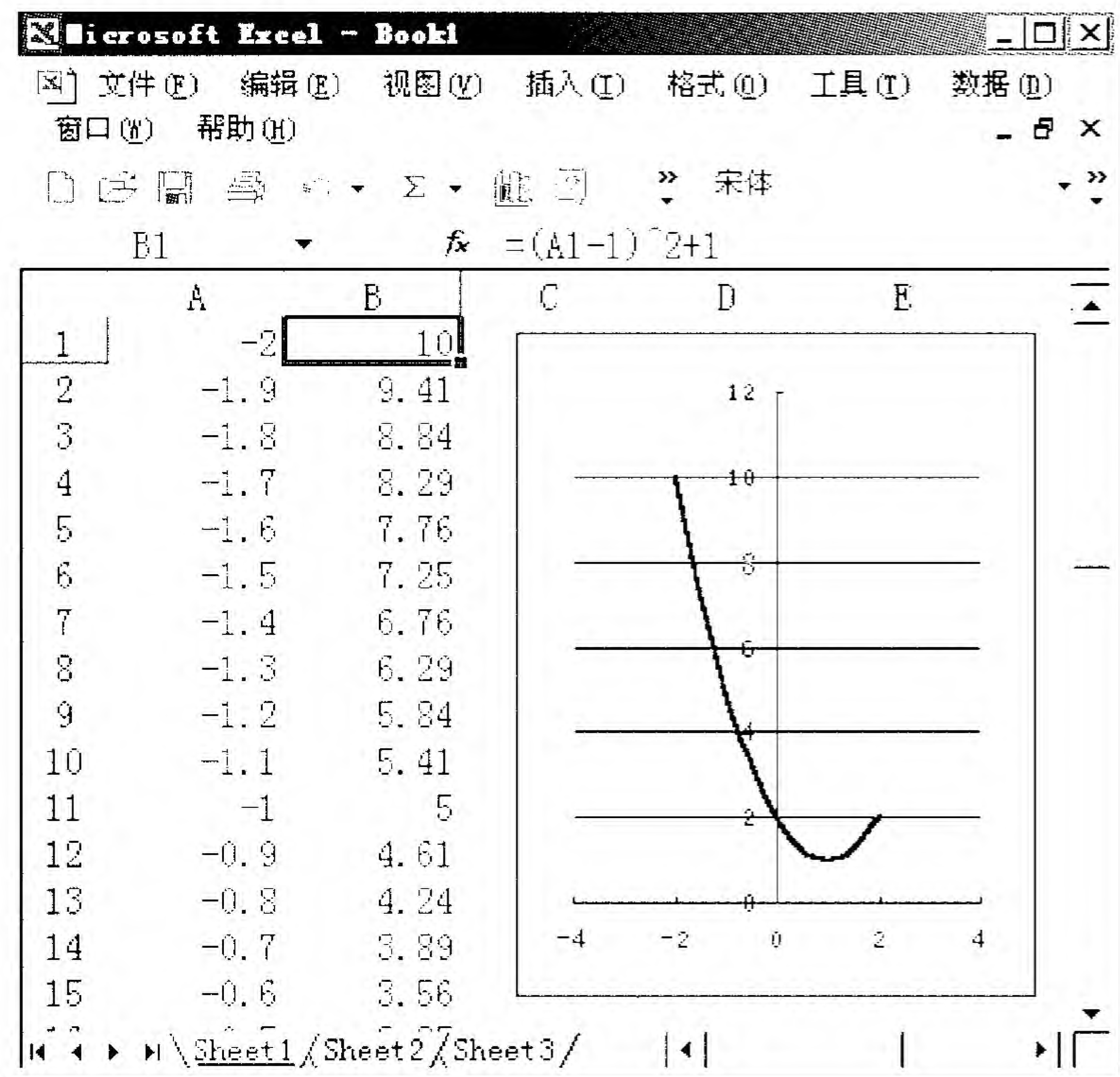


(2) 第二列产生对应的函数值:如图 2-1-9,在 B1 内输入"=(A1-1)^2+1",敲回车键或在编辑栏内选中"√";

(3) 拖曳 B1 格的填充柄至所需的单元格,得到与第一列相对应的函数值;

(4) 光标置于数据区的任一位置,插入"图表",选择"XY 散点图/无数据点平滑线散点图",点击"完成",便得函数 $f(x)=(x-1)^2+1$ 在区间$[-2, 2]$上的图象,如图 2-1-10.

用 Excel 作图的本质是描点画图,自变量的值用"等差趋势填充"生成,对应的函数值利用 Excel 的相对引用功能"拖曳"产生.至于取



点的多寡，可根据需要灵活调整（只要改变 A1 和 A2 格两个数的间隔——步长）. 在实际操作时，宜适度取点，这样既省时、省力，又能使绘出的图象更清晰、美观.

你能用上面的方法绘制函数 $f(x)=x^3$ 的图象吗？

1. 画出下列函数的图象：

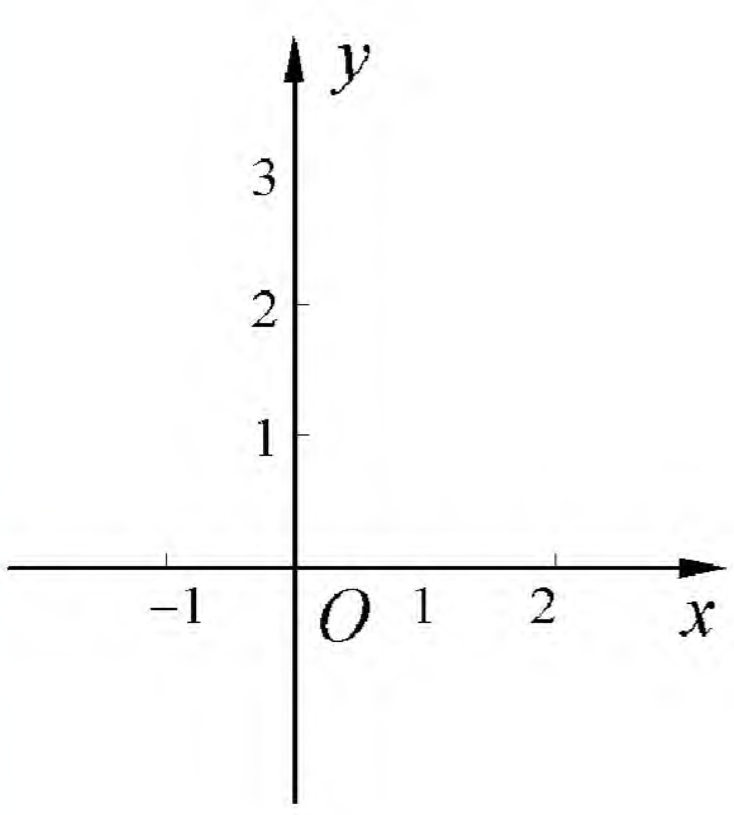
(1) $f(x)=2x-1$；　　(2) $f(x)=2x-1,\ x\in[-1,\ 2)$；

(3) $f(x)=\dfrac{1}{x},\ x\in(0,\ +\infty)$；　　(4) $f(x)=\dfrac{1}{x}+1,\ x\in(0,\ +\infty)$；

(5) $f(x)=x^2,\ x\in[-1,\ 2]$；　　(6) $f(x)=(x-1)^2,\ x\in[0,\ 3]$.

2. 先画出下列函数的图象，再求出每个函数的值域：

(1) $f(x)=x^2,\ x\in[1,\ 2)$；　　(2) $f(x)=\sqrt{x}$，x 为正实数.



3. 函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示，填空：

(1) $f(0)=$ ________；

(2) $f(1)=$ ________；

(3) $f(2)=$ ________；

(4) 若 $-1<x_1<x_2<1$，则 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小关系是____________.

1. 已知函数 $y=5x-2$.

(1) 当 $x=0,\ 1,\ 5$ 时，分别求出 y 的值；

(2) 当 $y=0,\ 1,\ 5$ 时，分别求出 x 的值.

2. 判断下列对应 f 是否为从集合 A 到集合 B 的函数：

(1) $A=\{1,\ 2,\ 3\}$，$B=\{7,\ 8,\ 9\}$，$f(1)=f(2)=7$，$f(3)=8$；

(2) $A=\mathbf{Z}$，$B=\{-1,\ 1\}$，n 为奇数时，$f(n)=-1$；n 为偶数时，$f(n)=1$；

(3) $A=B=\{1,\ 2,\ 3\}$，$f(x)=2x-1$；

(4) $A=B=\{x\mid x\geqslant -1\}$，$f(x)=2x+1$.

3. 求下列函数的定义域、值域，并画出图象：

(1) $f(x)=3x$；　　(2) $f(x)=-3x+1$；

(3) $f(x)=-\dfrac{1}{x}$；　　(4) $f(x)=-\dfrac{1}{x}+1$.

4. 2000 年我国国内生产总值(GDP)约是 89 442 亿元. 若我国国内生产总值年均增长 7.8%，按照此增长速度，从 2004 年到 2010 年，我国国内年生产总值大约各是多少亿元？请填写下表(可以使用计算工具，a 为年的英文缩写).

时间/a	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
金额/亿元							

5. 直线 $x=a$ 和函数 $y=x^2+1$ 的图象的公共点可能有几个？

6. 已知函数 $f(x)=ax+b$，且 $f(3)=7$，$f(5)=-1$，求 $f(0)$，$f(1)$ 的值.

7. 如果 $f(t)=\dfrac{t}{1+t}$，$g(t)=\dfrac{t}{1-t}$，证明：$f(t)-g(t)=-2g(t^2)$.

$$\begin{array}{c} x \\ \downarrow \\ f \\ \downarrow \\ f(x) \\ \downarrow \\ g \\ \downarrow \\ g(f(x)) \end{array}$$

8. 已知函数 $f(x)$与 $g(x)$分别由下表给出，那么

$f(f(1))=$________，$f(g(2))=$________，

$g(f(3))=$________，$g(g(4))=$________.

x	1	2	3	4	x	1	2	3	4
$f(x)$	2	3	4	1	$g(x)$	2	1	4	3

9. 设函数 $f(x)=2x+3$，函数 $g(x)=3x-5$，求 $f(g(x))$，$g(f(x))$.

10. 已知集合 $A=\mathbf{R}$，$B=\{-1, 1\}$，对应法则 f：当 x 为有理数时，$f(x)=-1$；当 x 为无理数时，$f(x)=1$. 该对应是从集合 A 到集合 B 的函数吗？

11. (操作题)将一枚骰子投掷 10 次，并将每次骰子向上的点数记录在下表中. 规定对应法则 f：对每一投掷序号 $n(n=1, 2, \cdots, 10)$ 对应到该次骰子的向上点数. 试判断对应 f 是否为函数. 若是，该函数值域一定是集合$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$吗？

投掷序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
向上点数										

让我们再来看第 2.1.1 节开头的三个函数问题.

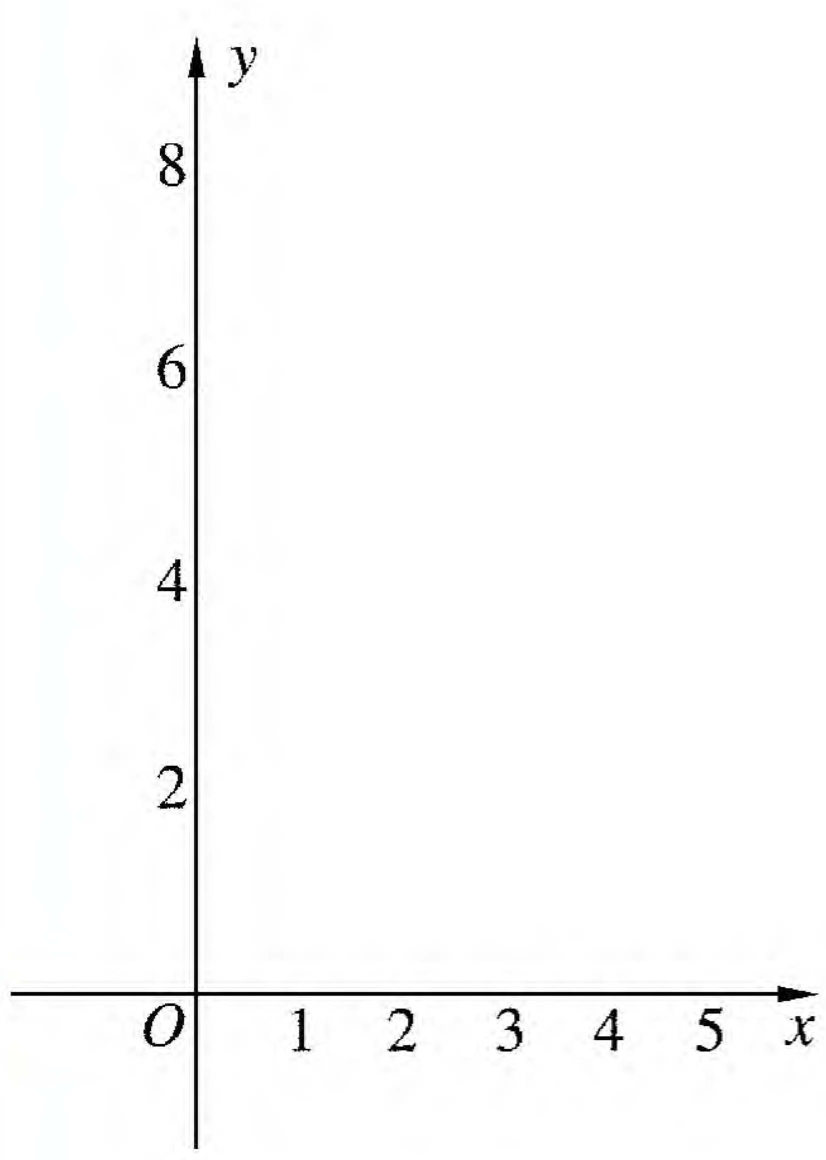
在第一个问题中,只要知道了表 2－1－1 中的某个年份,就能从此表中查得相应的人口数.这种用列表来表示两个变量之间函数关系的方法称为 ______.

在第二个问题中,物体下落时间 x 与下落距离 y 的函数关系为 $y=4.9x^2\ (x\geqslant 0)$.这种用等式来表示两个变量之间函数关系的方法称为 ______.这个等式通常叫做函数的解析表达式,简称解析式.

在第三个问题中,我们用图象表示了时刻与气温的关系.这种用图象表示两个变量之间函数关系的方法称为 ______.

列表法、解析法、图象法是表示函数的三种常用方法.

用列表法表示函数关系,不必通过计算就可以知道自变量取某个值时,相应的函数值是多少;用解析法表示函数关系,便于用解析式研究函数的性质;而用图象法表示函数关系,可以从整体上直观而形象地表示出函数的变化情况.



购买某种饮料 x 听,所需钱数为 y 元.若每听 2 元,试分别用解析法、列表法、图象法将 y 表示成 $x(x\in\{1,2,3,4\})$ 的函数,并指出该函数的值域.

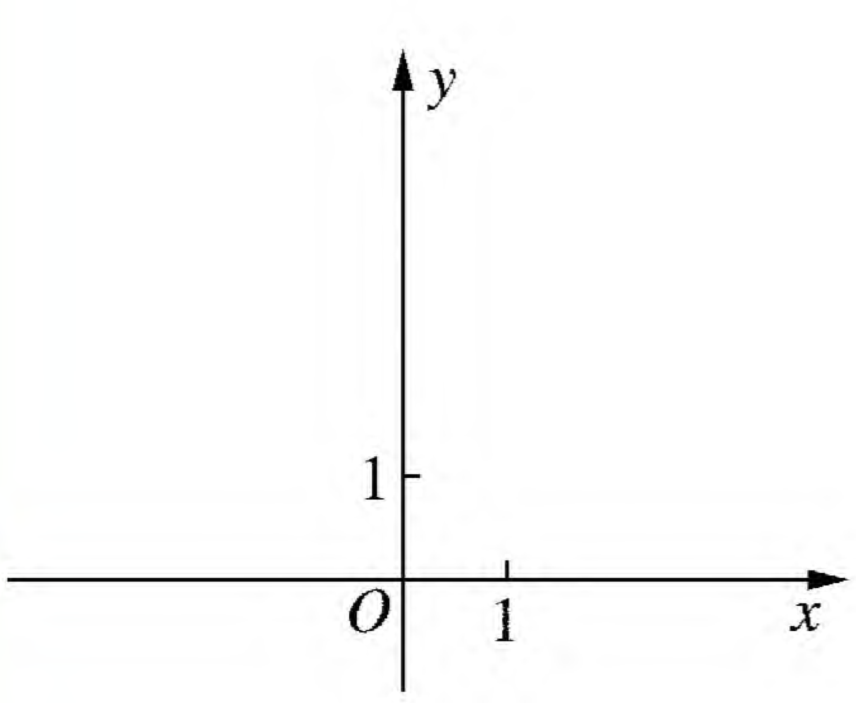
(1) 解析法:$y=2x,\ x\in\{1,2,3,4\}$.

(2) 列表法:

x/听	1	2	3	4
y/元	2	4	6	8

(3) 图象法:图象由点(1, 2),(2, 4),(3, 6),(4, 8)组成,如图 2－1－11 所示.

函数的值域是$\{2,4,6,8\}$.



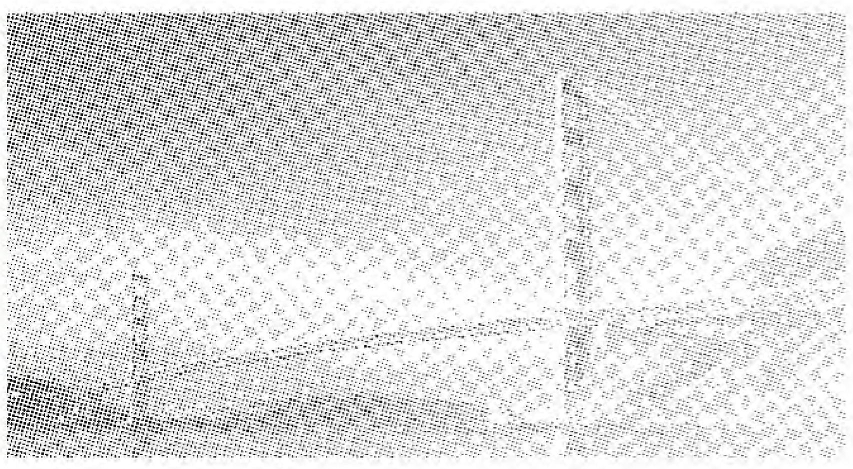
画出函数 $f(x)=|x|$ 的图象,并求 $f(-3)$, $f(3)$, $f(-1)$, $f(1)$的值.

因为

$$f(x)=|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0,\end{cases}$$

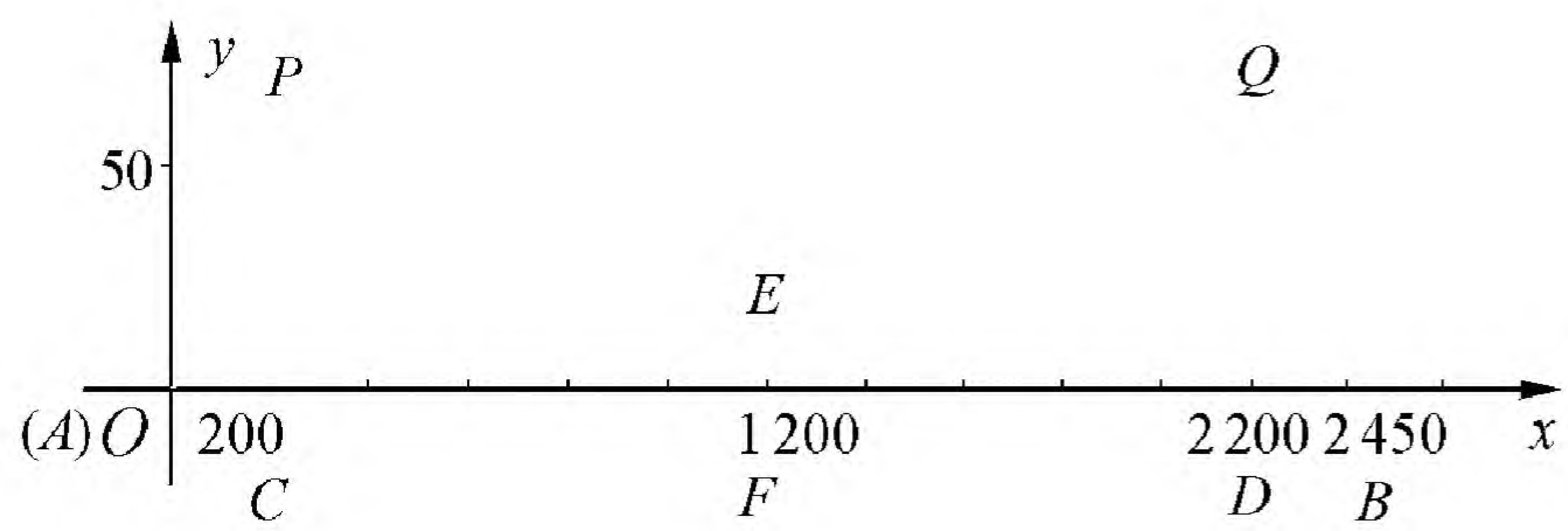
所以函数 $f(x)$ 的图象为过原点且平分第一、第二象限的一条折线,如图 2－1－12 所示.其中

$$f(-3)=3,\ f(3)=3,\ f(-1)=1,\ f(1)=1.$$



如图 2-1-13，一座钢索结构桥的立柱 PC 与 QD 的高度都是 60 m，A，C 间距离为 200 m，B，D 间距离为 250 m，C，D 间距离为 2 000 m，E，F 间距离为 10 m，P 点与 A 点间、Q 点与 B 点间分别用直线式桥索相连结，立柱 PC，QD 间可以近似看做是抛物线式钢索 PEQ 相连结. 现有一只江鸥从 A 点沿着钢索 AP，PEQ，QB 走向 B 点，试写出从 A 点走到 B 点江鸥距离桥面的高度与移动的水平距离之间的函数关系.

如图 2-1-13，以 A 点为原点，桥面 AB 为 x 轴，过 A 点且垂直于 AB 的直线为 y 轴，建立直角坐标系，则 $A(0,\ 0)$，$C(200,\ 0)$，$P(200,\ 60)$，$E(1\,200,\ 10)$，$D(2\,200,\ 0)$，$Q(2\,200,\ 60)$，$B(2\,450,\ 0)$.



设直线段 PA 满足关系式 $y=kx$，那么由 $60=k\times 200$，得 $k=0.3$，即有

$$y=0.3x,\ 0\leqslant x\leqslant 200.$$

设直线段 QB 满足关系式 $y=lx+b$，那么由

$$\begin{cases} 0=2\,450l+b, \\ 60=2\,200l+b \end{cases}$$

得 $l=-0.24$，$b=588$，即有

$$y=-0.24x+588,\ 2\,200\leqslant x\leqslant 2\,450.$$

设抛物线段 PEQ 满足关系式 $y=r(x-1\,200)^2+10$，那么由 $60=r(200-1\,200)^2+10$ 得 $r=0.000\,05$，即有

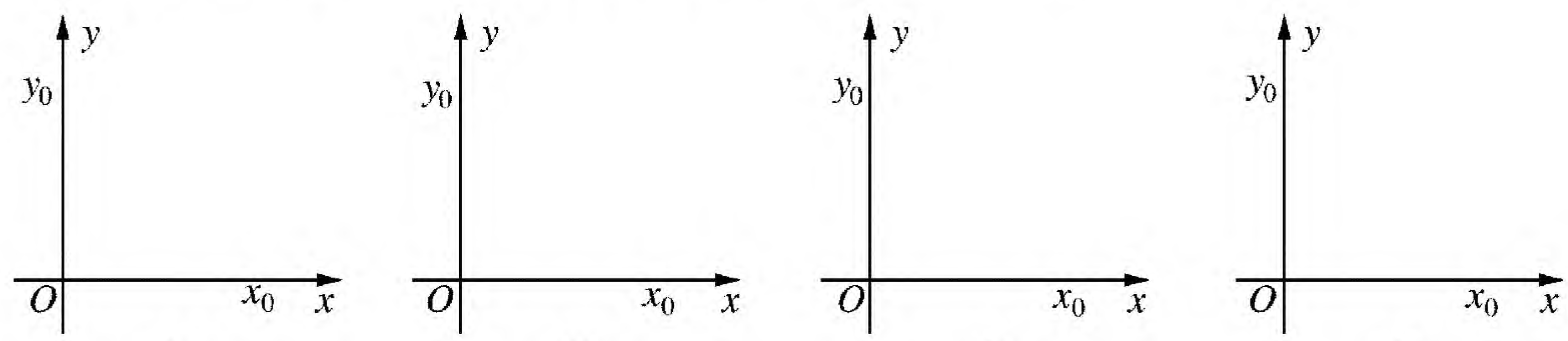
$$y=0.000\,05(x-1\,200)^2+10,\ 200\leqslant x\leqslant 2\,200.$$

因此，符合要求的函数是

$$y=\begin{cases} 0.3x, & 0\leqslant x<200, \\ 0.000\,05(x-1\,200)^2+10, & 200\leqslant x<2\,200, \\ -0.24x+588, & 2\,200\leqslant x\leqslant 2\,450. \end{cases}$$

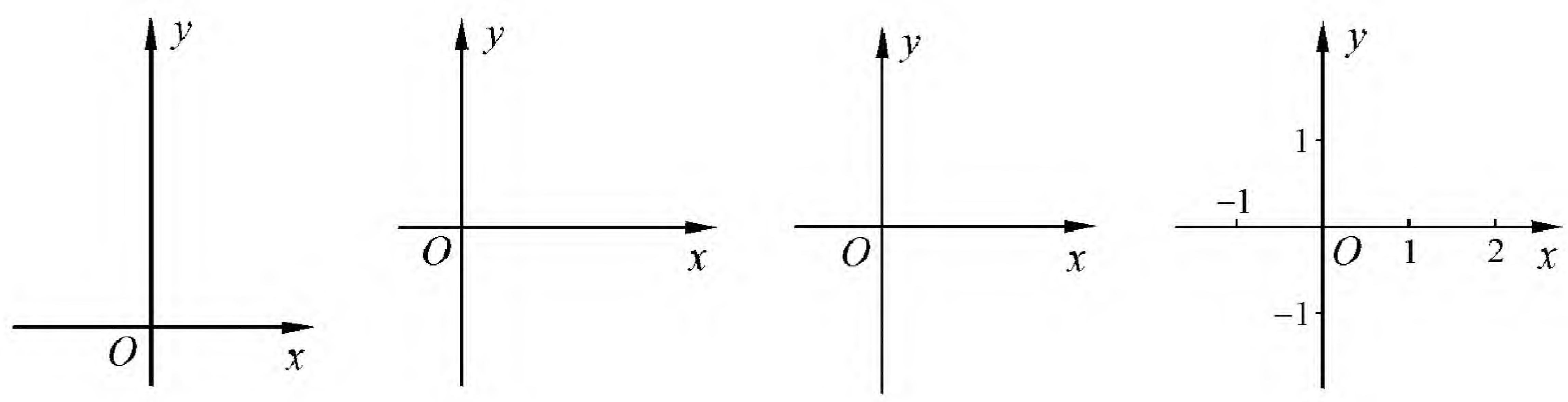
例 2、例 3 中的函数具有共同特点：在定义域内不同部分上，有不同的解析表达式. 像这样的函数通常叫做

1. 1 n mile(海里)约合 1 852 m，根据这一关系，写出米数 y 关于海里数 x 的函数解析式.
2. 画出函数 $f(x)=|x+3|$ 的图象.
3. 某人去上班，先跑步，后步行. 如果 y 表示该人离单位的距离，x 表示出发后的时间，则下列图象中符合此人走法的是(　　).



A.　　B.　　C.　　D.

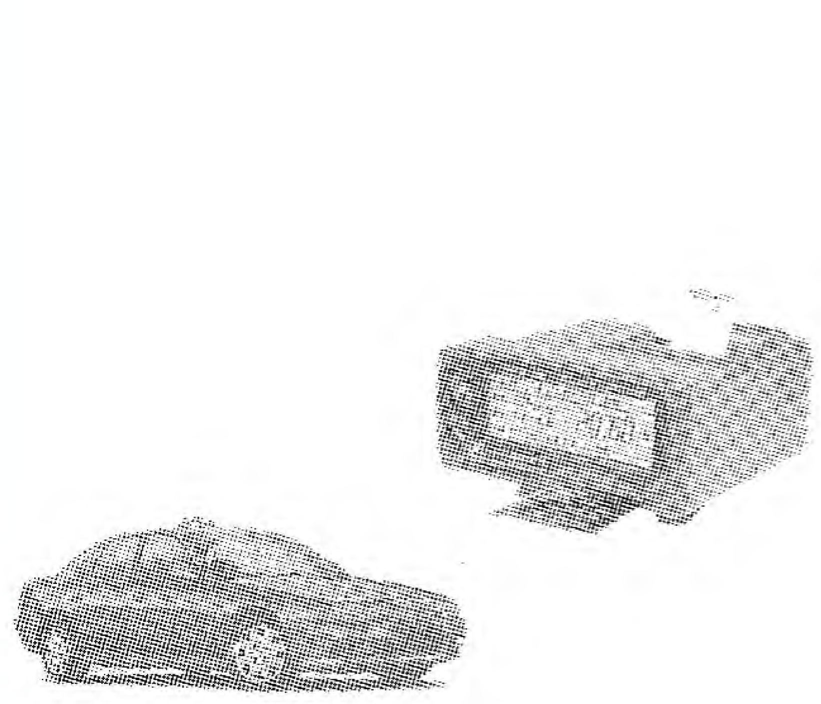
4. 用长为 30 cm 的铁丝围成矩形，试将矩形面积 $S(\mathrm{cm}^2)$ 表示为矩形一边长 $x(\mathrm{cm})$ 的函数，并画出函数的图象.
5. 下列图象中表示函数关系 $y=f(x)$ 的有________.



(1)　　(2)　　(3)　　(4)

6. 设一个函数的解析式为 $f(x)=2x+3$，它的值域为 $\{-1, 2, 5, 8\}$，试求此函数的定义域.
7. 设 $A\subseteq \mathbf{Z}$，且 $A\neq\varnothing$，从 A 到 $\mathbf{Z}$ 的两个函数分别为 $f(x)=x^2+1$，$g(x)=3x+5$. 若对于 A 中的任意一个 x，都有 $f(x)=g(x)$，试求集合 A.

1. 建造一个容积为 8 m^3、深为 2 m 的长方体形无盖水池，如果池底和池壁的造价分别为 120 元/m^2 和 80 元/m^2，求总造价 y(元)关于底面一边长 x(m)的函数解析式，并指出该函数的定义域.
2. 物体从静止开始下落，下落的距离与下落时间的平方成正比. 已知开始下落的 2 s 内，物体下落了 19.6 m，求开始下落的 3 s 内物体下落的距离.
3. 设距地面高度 x(km)的气温为 y(℃)，在距地面高度不超过11 km时，y 随着 x 的增加而降低，且每升高 1 km，大气温度降低 6℃；高度超过 11 km 时，气温可视为不变. 设地面气温为 22℃，试写出 $y=f(x)$ 的解析式，并分别求高度为 3.5 km 和 12 km 的气温.



4. 某市出租汽车收费标准如下：在 3 km 以内(含 3 km)路程按起步价 7 元收费，超过3 km 以外的路程按 2.4 元/km 收费. 试写出收费额关于路程的函数解析式.
5. 作出函数 $f(x)=-x^2+x+1\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$ 的图象.

6. 已知 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{1,3,5\}$，试写出从集合 A 到集合 B 的两个函数.

7. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ x^2, & x<0,\end{cases}$ 试求 $f(f(-2))$ 的值.

8. 作出函数 $y=x^3\ \left(x\in\left\{-2,-1.5,-1,-0.5,0,0.5,1,1.5,2\right\}\right)$ 的图象.

9. 国内投寄信函的邮资标准是：每封信的质量不超过 20 g 付邮资 80 分，超过 20 g 而不超过 40 g 付邮资 160 分，超过 40 g 而不超过 60 g 付邮资 240 分，依此类推. 试画出每封不超过 90 g 的信函应付邮资 y(分)与信函的质量 x(g)之间的函数关系的图象.

10. 请写出三个不同的函数解析式，满足 $f(1)=1$，$f(2)=4$.

11. 已知某皮鞋厂一天的生产成本 C(元)与生产数量 n(双)之间的函数关系是 $C=4\,000+50n$.

(1) 求一天生产 1 000 双皮鞋的成本；

(2) 如果某天的生产成本是 48 000 元，问：这一天生产了多少双皮鞋？

(3) 若每双皮鞋的售价为 90 元，且生产的皮鞋全部售出，试写出这一天的利润 P 关于这一天生产数量 n 的函数关系式，并求出每天至少生产多少双皮鞋，才能不亏本.

12. 已知一个函数的解析式为 $y=x^2$，它的值域是$\{1,4\}$，求此函数的定义域.

13. 求满足下列条件的函数 $f(x)$的解析式：

(1) $f(1+x)=3x+2$；

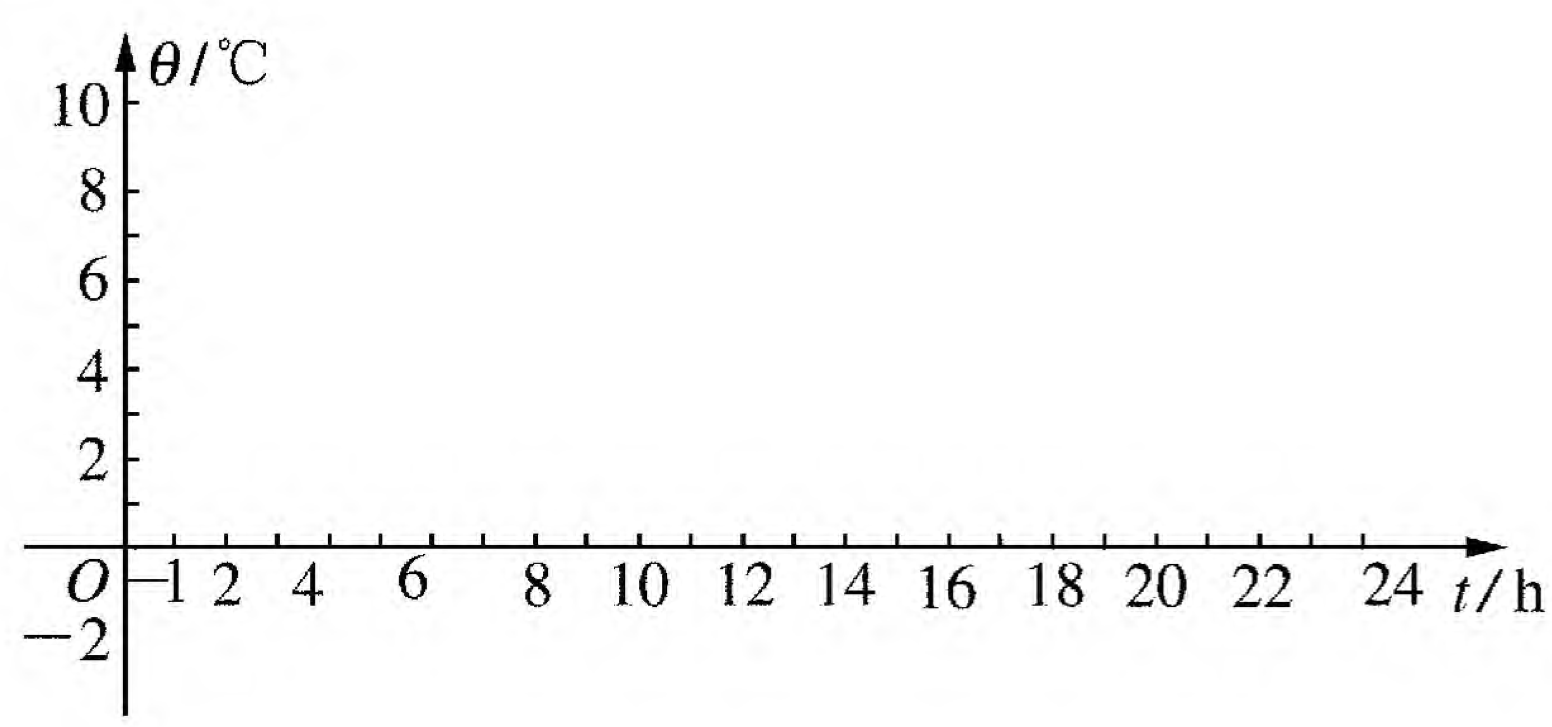
(2) $f(2x)=3x^2+1$.

14. (开放题)已知一个函数的解析式为 $y=x^2$，它的值域为$[1,4]$，这样的函数有多少个?试写出其中两个函数.

15. 如果 $f(x)=x+1$，试求 $f(f(f(x)))$ 的表达式，并猜一猜 $\underbrace{f(f(f(f(\cdots f}_{n个f}(x)\cdots))))\ (n\in\mathbf{N}^*)$ 的表达式.

第 2.1.1 节开头的第三个问题中，气温 θ 是关于时间 t 的函数，记为 $\theta = f(t)$. 观察这个气温变化图(如图 2 - 1 - 14)，说出气温在哪些时段内是逐渐升高的或下降的？

怎样用数学语言刻画上述时段内“随着时间的增大气温逐渐升高”这一特征？



一般地，设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 A，区间 $I \subseteq A$.

如果对于区间 I 内的任意两个值 x_1, x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，都有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

那么就说 $y = f(x)$ 在区间 I 上是**单调增函数**(increasing function)，I 称为 $y = f(x)$ 的**单调增区间**(increasing interval).

如果对于区间 I 内的任意两个值 x_1, x_2，当 $x_1 < x_2$ 时都有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

那么就说 $y = f(x)$ 在区间 I 上是**单调减函数**(decreasing function)，I 称为 $y = f(x)$ 的**单调减区间**(decreasing interval).

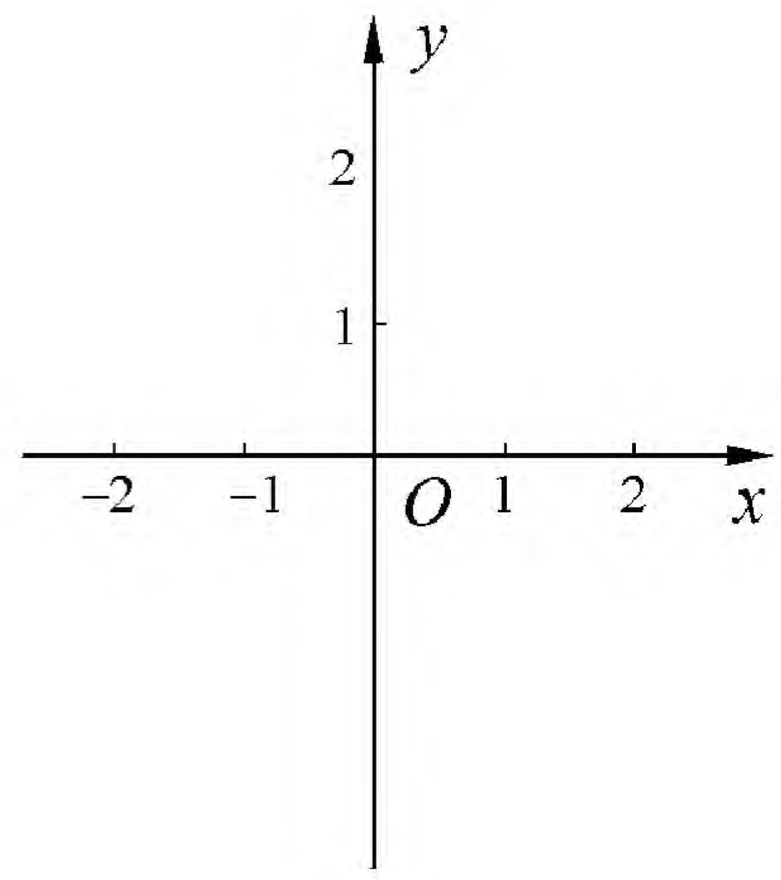
单调增区间和单调减区间统称为单调区间.

画出下列函数图象，并写出单调区间：

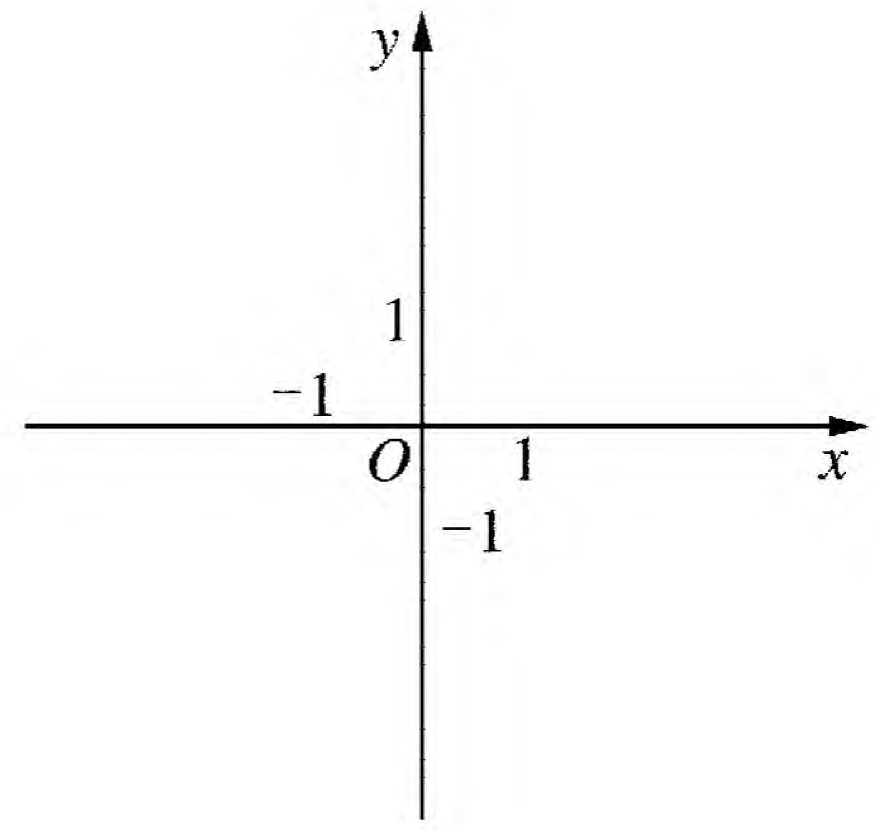
(1) $y = -x^2 + 2$；

(2) $y = \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$.

(1) 函数图象如图 2 - 1 - 15(1)，单调增区间为$(-\infty, 0]$，单调减区间为$[0, +\infty)$.



(1)



(2)

(2) 函数图象如图 2-1-15(2),$(-\infty, 0)$和$(0, +\infty)$是两个单调减区间.

求证：函数 $f(x)=-\dfrac{1}{x}-1$ 在区间$(-\infty, 0)$上是单调增函数.

对于区间$(-\infty, 0)$内的任意两个值 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，则

$$x_1-x_2<0,\ x_1x_2>0.$$

因为

$$\begin{aligned}&f(x_1)-f(x_2)\\&=\left(-\frac{1}{x_1}-1\right)-\left(-\frac{1}{x_2}-1\right)\\&=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2},\end{aligned}$$

所以

$$f(x_1)-f(x_2)<0,$$

即

$$f(x_1)<f(x_2),$$

故 $f(x)=-\dfrac{1}{x}-1$ 在区间$(-\infty, 0)$上是单调增函数.

在图 2-1-14 中，我们从图象上看出 14 时的气温为全天的最高气温，它表示在 0～24 时之间，气温于 14 时达到最大值. 从图象上看出，图象在这一点的位置最高.

在图 2-1-15(1)中，可以看出对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有

$$f(x)\leqslant 2=f(0).$$

一般地,设 $y=f(x)$ 的定义域为 A.

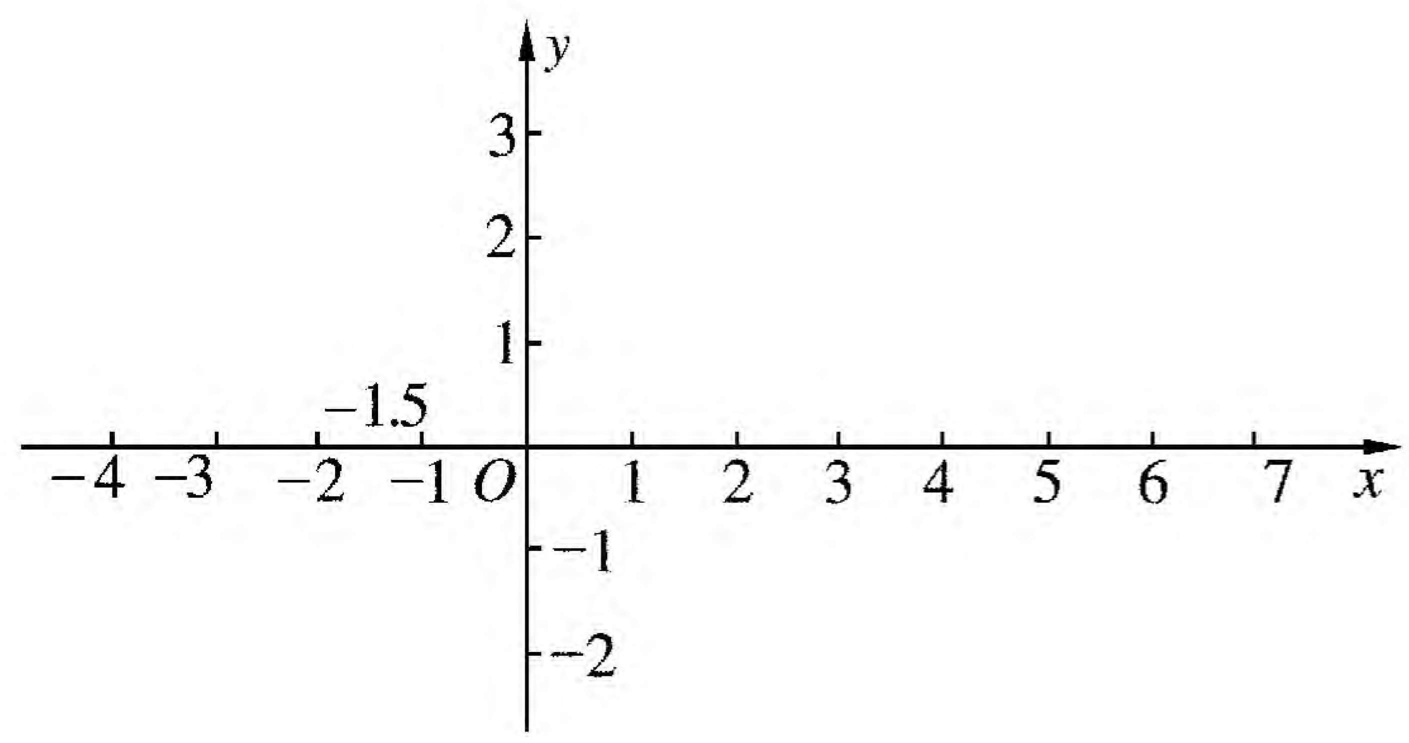
若存在定值 $x_0\in A$,使得对于任意 $x\in A$,有 $f(x)\leqslant f(x_0)$ 恒成立,则称 $f(x_0)$ 为 $y=f(x)$ 的**最大值**(maximum value),记为

$$y_{\max}=f(x_0);$$

若存在定值 $x_0\in A$,使得对于任意 $x\in A$,有 $f(x)\geqslant f(x_0)$ 恒成立,则称 $f(x_0)$ 为 $y=f(x)$ 的**最小值**(minimum value),记为

$$y_{\min}=f(x_0).$$

图 2－1－16 为函数 $y=f(x)$, $x\in[-4, 7]$ 的图象,指出它的最大值、最小值及单调区间.



观察函数图象可以知道,图象上位置最高的点是 $(3, 3)$,最低的点是 $(-1.5, -2)$. 所以函数 $y=f(x)$ 当 $x=3$ 时取得最大值,即 $y_{\max}=3$,当 $x=-1.5$ 时取得最小值,即 $y_{\min}=-2$.

函数的单调增区间为 $[-1.5, 3]$, $[5, 6]$,单调减区间为 $[-4, -1.5]$, $[3, 5]$, $[6, 7]$.

求出下列函数的最小值:

(1) $y=x^2-2x$;

(2) $y=\dfrac{1}{x}$, $x\in[1, 3]$.

(1) 因为

$$y=x^2-2x=(x-1)^2-1\geqslant -1,$$

且当 $x=1$ 时 $y=-1$,所以函数取得最小值 -1,即 $y_{\min}=-1$.

(2) 因为对于任意实数 $x\in[1, 3]$ 都有 $\dfrac{1}{x}\geqslant\dfrac{1}{3}$,且当 $x=3$ 时 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3}$,所以函数取得最小值 $\dfrac{1}{3}$,即 $y_{\min}=\dfrac{1}{3}$.

已知函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[a, b]$, $a<c<b$. 当 $x\in$

$[a, c]$时，$f(x)$是单调增函数；当 $x\in[c, b]$时，$f(x)$是单调减函数. 试证明 $f(x)$在 $x=c$ 时取得最大值.

因为当 $x\in[a, c]$时，$f(x)$是单调增函数，所以对于任意 $x\in[a, c]$，都有 $f(x)\leqslant f(c)$；

又因为当 $x\in[c, b]$时，$f(x)$是单调减函数，所以对于任意 $x\in[c, b]$，都有 $f(x)\leqslant f(c)$.

因此，对于任意 $x\in[a, b]$都有 $f(x)\leqslant f(c)$，即 $f(x)$在 $x=c$ 时取得最大值.

1. 判断 $f(x)=x^2-1$ 在$(0, +\infty)$上是增函数还是减函数.

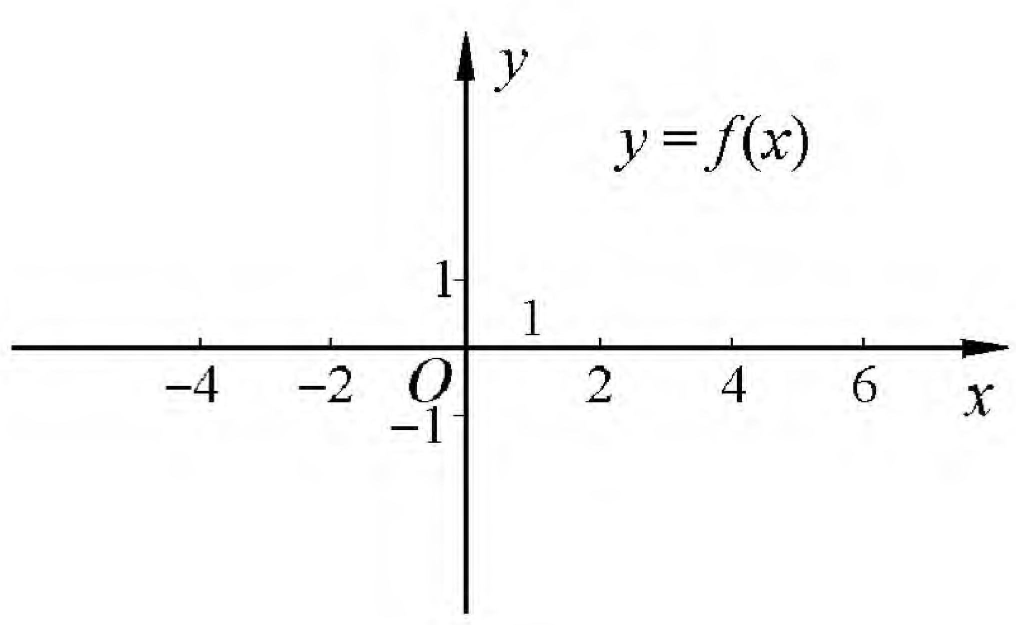
2. 判断 $f(x)=-x^2+2x$ 在$(-\infty, 0)$上是增函数还是减函数.

3. 求 $f(x)=-x^2+2x$ 在$[0, 10]$上的最大值和最小值.

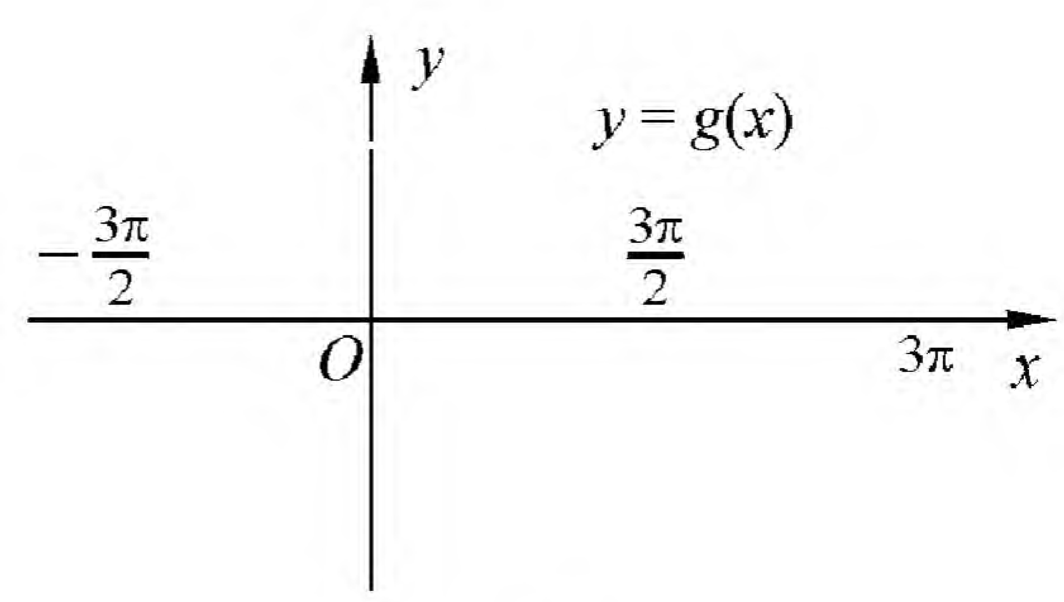
4. 函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间$(-2, -1]$上有最大值吗?有最小值吗?

5. 求证：函数 $f(x)=-2x+1$ 是定义域上的单调减函数.

6. 下图分别为函数 $y=f(x)$和 $y=g(x)$的图象，试写出函数 $y=f(x)$和 $y=g(x)$ 的单调增区间.



(1)



(2)

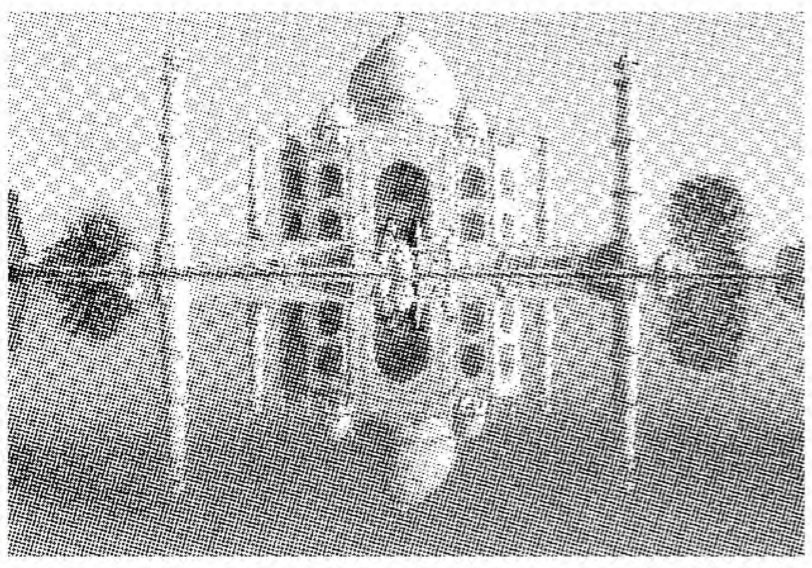
7. 判断下列说法是否正确：

(1) 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$满足 $f(2)>f(1)$，则函数 $f(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的增函数；

(2) 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$满足 $f(2)>f(1)$，则函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上不是减函数；

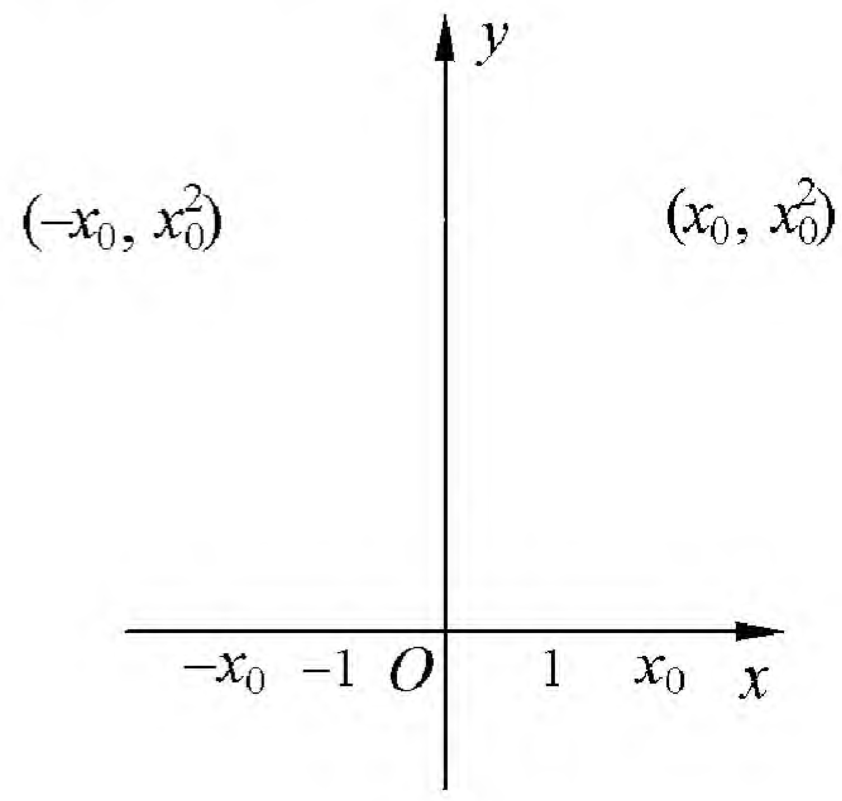
(3) 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$在区间$(-\infty, 0]$上是增函数，在区间$[0, +\infty)$上也是增函数，则函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是增函数；

(4) 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$在区间$(-\infty, 0]$上是增函数，在区间$(0, +\infty)$上也是增函数，则函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

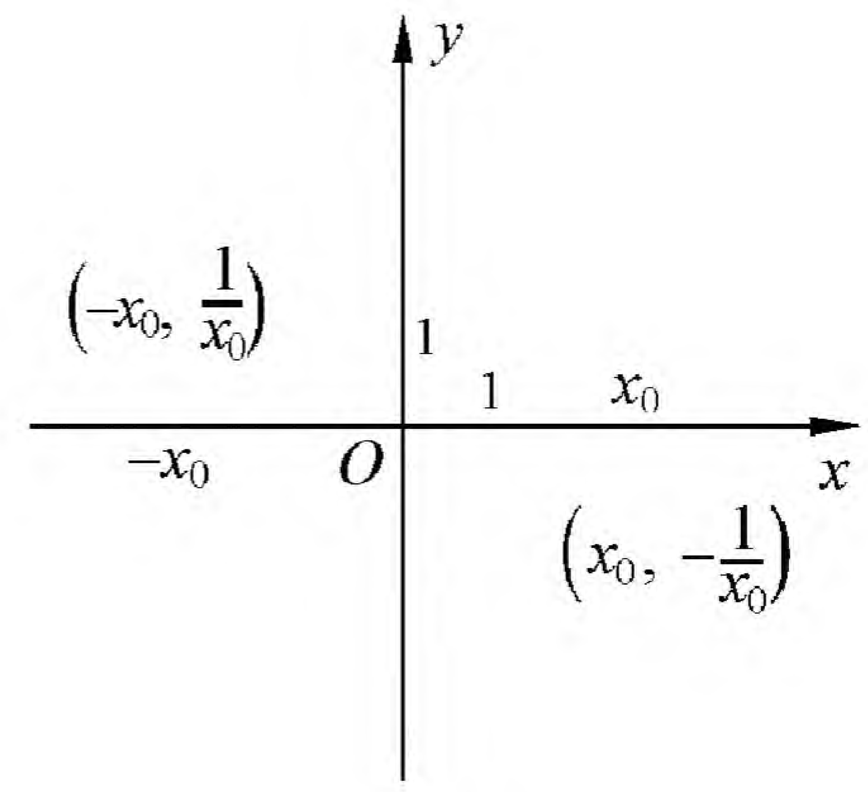


在我们的日常生活中，可以观察到许多对称现象：美丽的蝴蝶，盛开的花朵，六角形的雪花晶体，建筑物和它在水中的倒影……

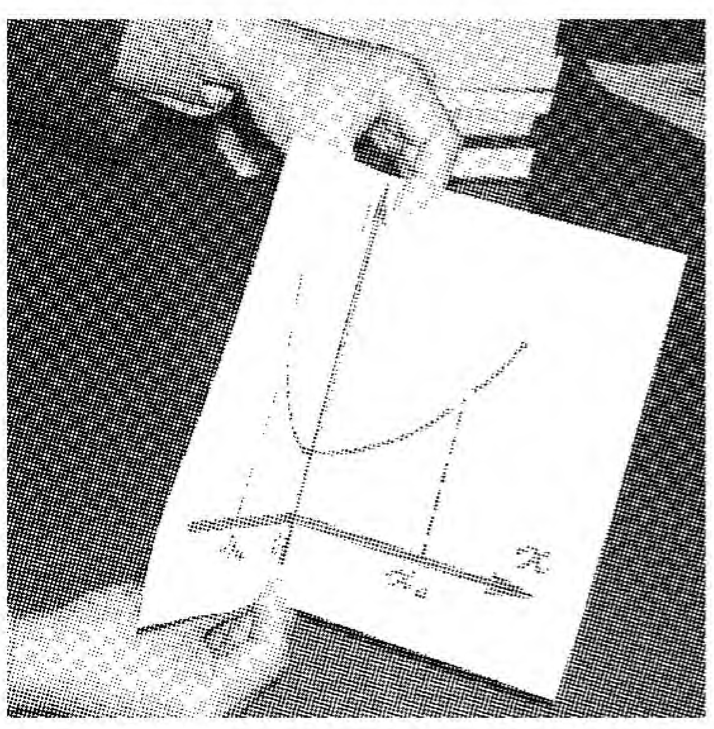
观察函数 $y=x^2$ 和 $y=-\dfrac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ 的图象，从对称的角度你发现了什么？



(1)



(2)



我们发现，函数 $y=x^2$ 的图象关于 y 轴对称，而函数 $y=-\dfrac{1}{x}$ 的图象关于原点对称.

函数图象的这种对称性除了可以从图象上认识外，还可以用数量关系来表述.

如果函数 $y=f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，把此图象沿 y 轴对折，那么图象上点 $(x_0, f(x_0))$ 与图象上哪一个点重合？

一般地，

如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内的任意一个 x，都有

$$f(-x)=f(x),$$

那么称函数 $y=f(x)$ 是**偶函数**(even function)；

如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内的任意一个 x，都有

$$f(-x)=-f(x),$$

那么称函数 $y=f(x)$ 是**奇函数**(odd function).

如果函数 $f(x)$ 是奇函数或偶函数，我们就说函数 $f(x)$ 具有奇偶性.

容易知道，偶函数的图象关于 y 轴对称，奇函数的图象关于原点对称.

判定下列函数是否为偶函数或奇函数：

(1) $f(x)=x^2-1$；　　(2) $f(x)=2x$；

(3) $f(x)=2|x|$；　　(4) $f(x)=(x-1)^2$.

(1) 函数 $f(x)=x^2-1$ 的定义域是 $\mathbf{R}$.

因为对于任意的 $x\in\mathbf{R}$,都有

$$f(-x)=(-x)^2-1=x^2-1=f(x),$$

所以函数 $f(x)=x^2-1$ 是偶函数.

(2) 函数 $f(x)=2x$ 的定义域是 $\mathbf{R}$.

因为对于任意的 $x\in\mathbf{R}$,都有

$$f(-x)=2(-x)=-2x=-f(x),$$

所以函数 $f(x)$ 是奇函数.

(3) 函数 $f(x)=2|x|$ 的定义域是 $\mathbf{R}$.

因为对于任意的 $x\in\mathbf{R}$,都有

$$f(-x)=2|-x|=2|x|=f(x),$$

所以函数 $f(x)=2|x|$ 是偶函数.

(4) 函数 $f(x)=(x-1)^2$ 的定义域是 $\mathbf{R}$.

因为

$$f(1)=0,\ f(-1)=4,$$

所以

$$f(1)\neq f(-1),\ f(1)\neq -f(-1).$$

因此,根据函数奇偶性定义,可以知道函数 $f(x)=(x-1)^2$ 既不是奇函数也不是偶函数.

判断函数 $f(x)=x^3+5x$ 是否具有奇偶性.

函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$.

因为对于任意的 $x\in\mathbf{R}$,都有

$$\begin{aligned}f(-x)&=(-x)^3+5(-x)\\&=-(x^3+5x)\\&=-f(x),\end{aligned}$$

所以函数 $y=f(x)$ 为奇函数.

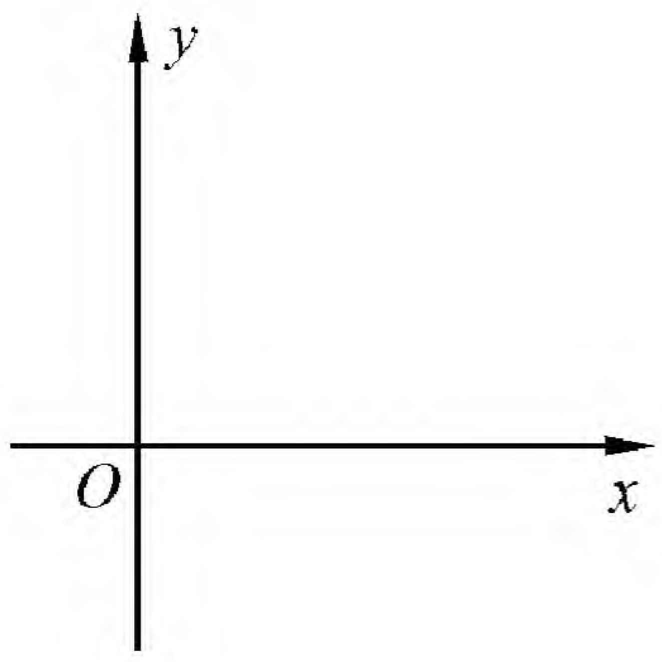
具有奇偶性的函数,其定义域具有怎样的特点?

1. 函数 $f(x)=\sqrt{x^2+5}$（　　）.

A. 是奇函数但不是偶函数　　B. 是偶函数但不是奇函数

C. 既是奇函数又是偶函数　　D. 既不是奇函数也不是偶函数

2. 函数 $f(x)=x^2+2x$ 的图象是否关于某条直线对称？它是否为偶函数？



3. 已知奇函数 $f(x)$在 y 轴右边的图象（如图），试画出函数 $f(x)$在 y 轴左边的图象.

4. 对于定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$，下列判断是否正确？

（1）若 $f(-2)=f(2)$，则函数 $f(x)$是偶函数；

（2）若 $f(-2)\neq f(2)$，则函数 $f(x)$不是偶函数；

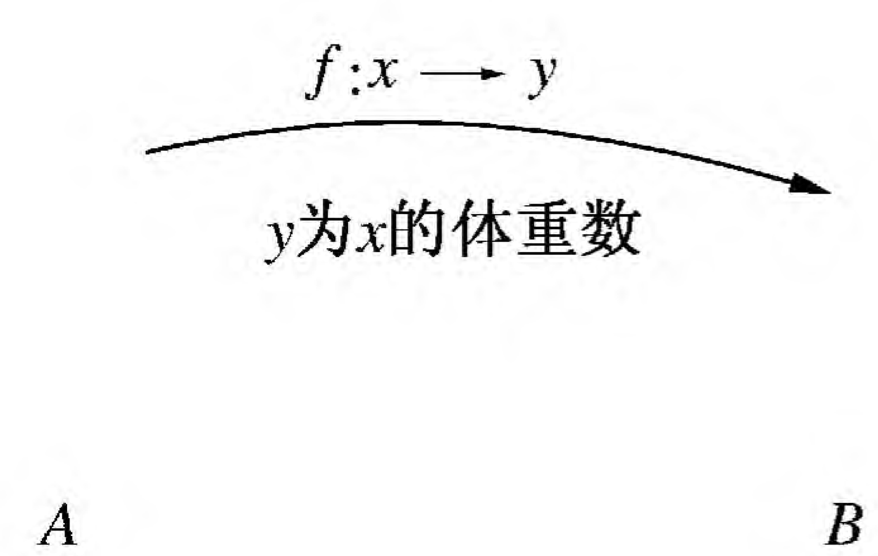
（3）若 $f(-2)=f(2)$，则函数 $f(x)$不是奇函数.

5. 证明函数 $f(x)=x^3-x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是奇函数.

6. 判断下列函数的奇偶性：

（1）$f(x)=x+\dfrac{1}{x}$；　　（2）$f(x)=\dfrac{x^4-1}{x^2}$.

我们已经知道，函数是建立在两个非空数集之间的单值对应. 其实，生活中还有很多在两个一般集合之间建立单值对应的例子. 例如，某班级全体同学组成的集合为 A，正实数集为 B，让每位同学与其体重数对应，则 A 中的每一个元素，在 B 中都有惟一的元素与之对应，可以用图 2－1－18 表示.



再如，坐标平面内的所有点组成的集合为 A，所有的有序数对组成的集合为

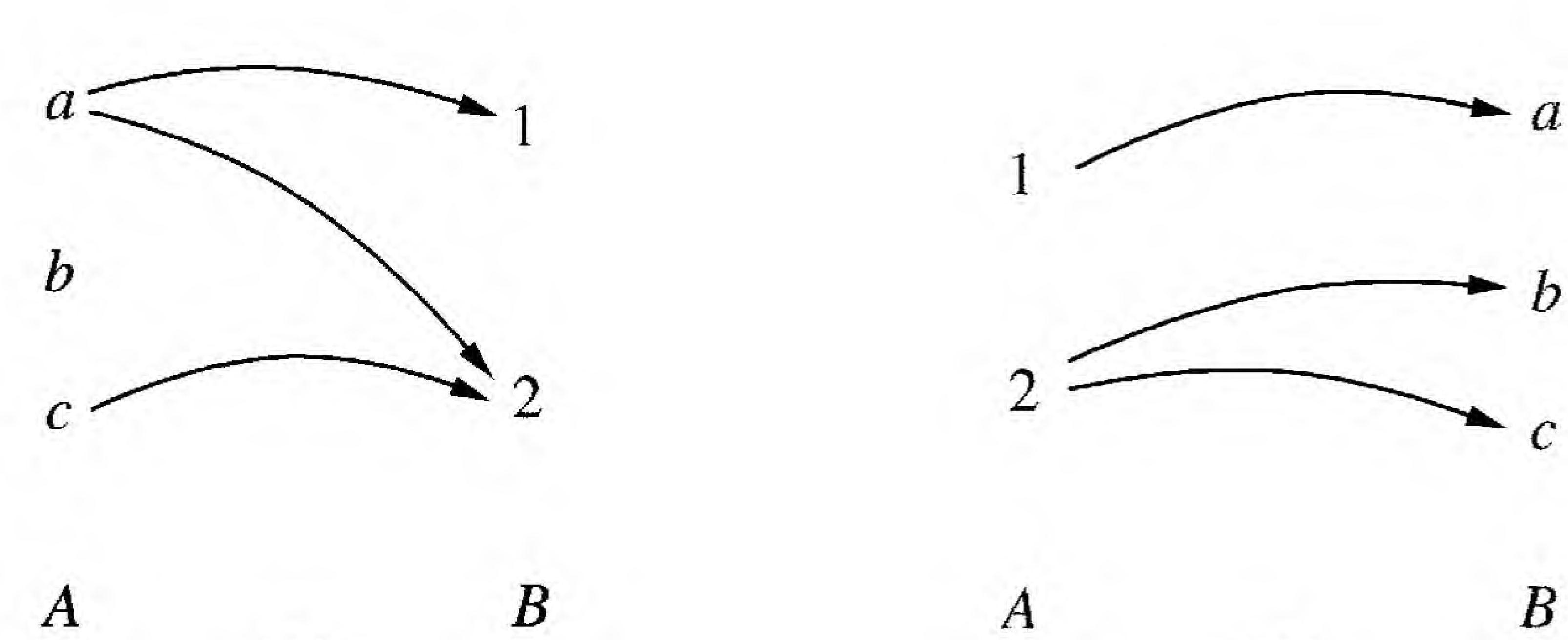
$$B=\{(x,\ y)\mid x\in\mathbf{R},\ y\in\mathbf{R}\}.$$

让每一点与其坐标对应，则 A 中的每一个元素（点），在 B 中都有惟一的元素（有序数对）与之对应.

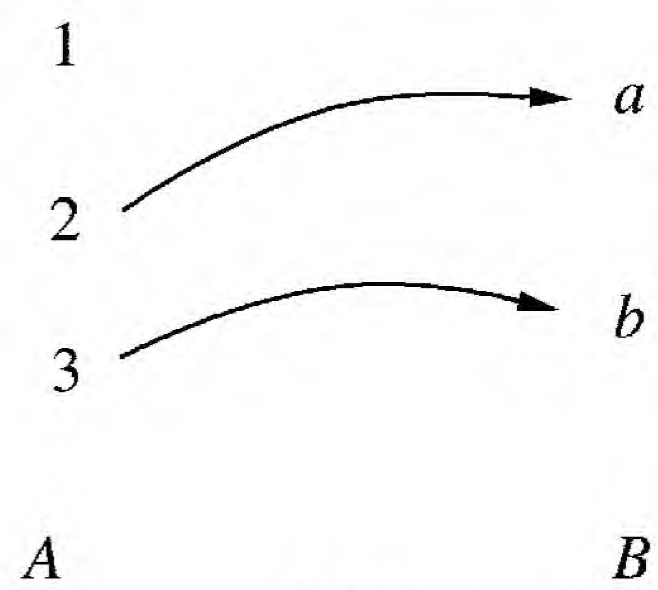
一般地，设 A，B 是两个集合，如果按某种对应法则 f，对于 A 中的每一个元素，在 B 中都有惟一的元素与之对应，那么，这样的单值对应叫做集合 A 到集合 B 的　　(mapping)，记作

$$f: A\rightarrow B.$$

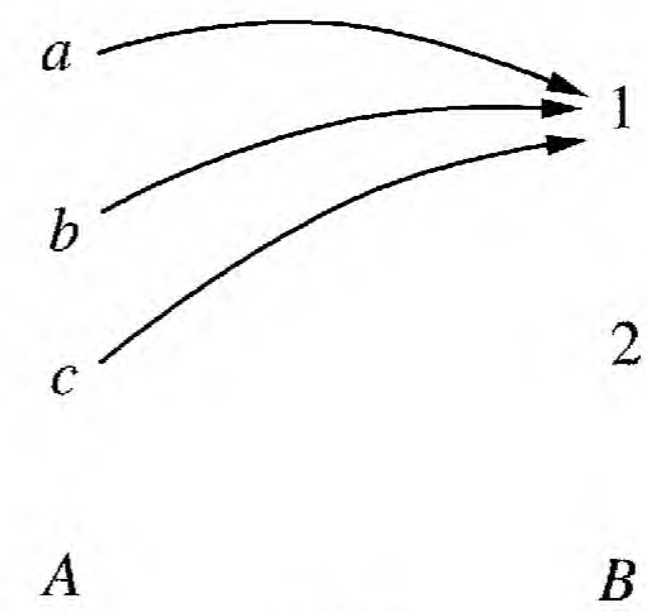
图 2－1－19 所示的对应中，哪些是 A 到 B 的映射？



(1)　　(2)



(3)



(4)

根据映射的定义，可以知道图 2-1-19 中，(4)是 A 到 B 的映射，(1)、(2)、(3)的对应不是 A 到 B 的映射.

映射与函数有什么区别与联系？

1. 下列对应关系中，哪些是 A 到 B 的映射？

(1) $A=\{1, 4, 9\}$, $B=\{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$, f: $x \longrightarrow x$ 的平方根；

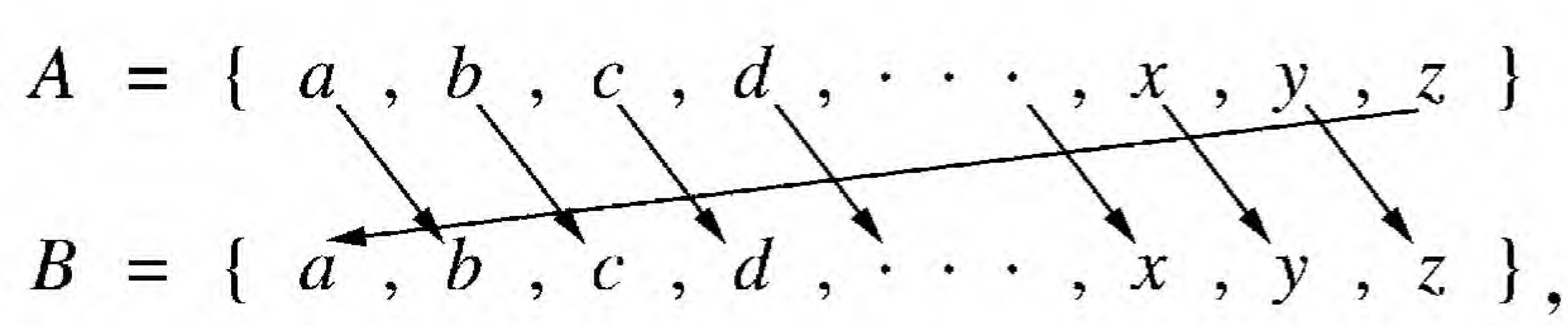
(2) $A=\mathbf{R}$, $B=\mathbf{R}$, f: $x \longrightarrow x$ 的倒数；

(3) $A=\mathbf{R}$, $B=\mathbf{R}$, f: $x \longrightarrow x^2-2$；

(4) A 是平面内周长为 5 的所有三角形组成的集合，B 是平面内所有点的集合，f: 三角形$\longrightarrow$三角形的外心.

2. 若 $B=\{-1, 3, 5\}$，试找出一个集合 A，使得 f: $x \longrightarrow 2x-1$ 是 A 到 B 的映射.

3. 设 $A=B=\{a, b, c, d, e, \cdots, x, y, z\}$（元素为 26 个英文字母），作映射 f: $A \to B$ 为



并称 A 中字母拼成的文字为明文，相应的 B 中对应字母拼成的文字为密文.

(1) “*mathematics*”的密文是什么？

(2) 试破译密文“*ju jt gvooz*”.

4. 从 2003 年 9 月 1 日开始，我国汽车牌照将实行公开选号的方法：每位车主有权利使用电脑进行最多两次随机选择，最终只能从选择的号码中选取一个作为该车的车号. 如果车主选择了两次选号，那么他必须在三分钟内从中选出一个号码作为其车号，否则，就将他选出的第二个号码作为其车号. 下表是某市车管所在某时段的选号情况.

车　主	甲	乙	丙	丁	戊
车　号	3271,4598	5072,6293	4205,5568	2288	5256,8285

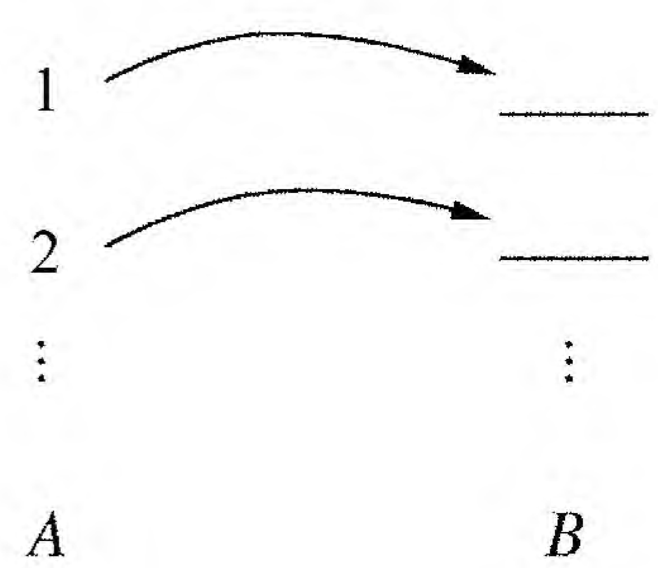
设 $A=\{$甲，乙，丙，丁，戊$\}$，$B=\{3271, 4598, 5072, 6293, 4205, 5568, 2288, 5256, 8285\}$，问：

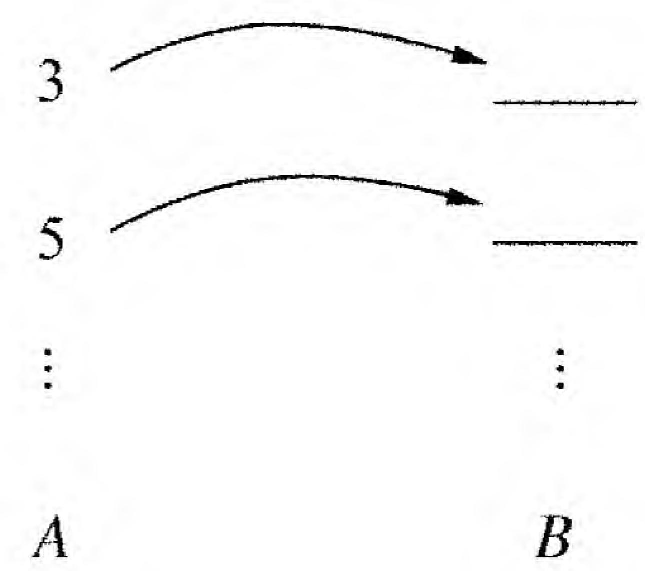
(1) 对应关系“$A \to B$，车主 $\to$ 电脑给出的车号”是不是映射？

(2) 对应关系“$A \to B$，车主 $\to$ 他的车号”是不是映射？

5. 根据对应法则，写出图中给定元素的对应元素，并用语言叙述下述两个映射 f 与 g 的关系.

(1) f：$x \to 2x+1$；　　　　(2) g：$x \to \dfrac{x-1}{2}$.





1. 已知 k，b 是常数，且 $k \neq 0$，试根据函数 $y=kx+b$ 与 $y=\dfrac{k}{x}+b$ 的图象填写下表：

函　数	$y=kx+b$		$y=\dfrac{k}{x}+b$	
	$k>0$	$k<0$	$k>0$	$k<0$
单调区间				
单调性				

2. 试求第 2.1.1 节例 6 中函数的单调区间.

3. 画出下列函数的图象，指出函数的单调区间，并求出函数的最大值或最小值.

(1) $y=-x^2+1$；　　(2) $y=x^2-2x-1$，$x \in [-1, 1]$；

(3) $f(x)=-2\sqrt{x}$；　　(4) $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1, & x \in [0, +\infty), \\ -x^2+2x-1, & x \in (-\infty, 0). \end{cases}$

4. 已知函数 $y=f(x)$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上是单调减函数，试比较 $f(a^2+1)$ 与 $f(2a)$ 的大小.

5. 下列函数哪些是奇函数？哪些是偶函数？哪些既不是奇函数也不是偶函数？

(1) $f(x)=5x-3$；

(2) $f(x)=5x+\dfrac{x}{x^2+2}$；

(3) $f(x)=ax^2+b$（其中 a，b 是常数）.

6. 已知函数 $f(x)=x^2-2|x|-1$，试判断函数 $f(x)$ 的奇偶性，并作出函数的图象.

7. 已知函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[a, b]$，$a<c<b$. 当 $x \in [a, c]$ 时，$f(x)$ 是单调减函数；当 $x \in [c, b]$ 时，$f(x)$ 是单调增函数. 求证：$f(x)$ 在 $x=c$ 时取得最小值.

8. 求证：

(1) 函数 $f(x)=-2x^2+3$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上是单调增函数；

(2) 函数 $f(x)=-x^3+1$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上是单调减函数；

(3) 函数 $f(x)=2-\dfrac{3}{x}$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上都是单调增函数；

(4) 函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1]$ 上是单调减函数，在区间 $[1, +\infty)$ 上是单调增函数.

9. 已知函数 $f(x)=x^2+mx+1$ 是偶函数，求实数 m 的值.

10. 已知函数 $y=f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $x>0$ 时，$f(x)=1$. 试求函数 $y=f(x)$ 的表达式.

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 F，函数 $g(x)$ 的定义域是 G，且对于任意的 $x\in G$，$g(x)\in F$，试根据下表中所给的条件，用“增函数”、“减函数”、“不能确定”填空：

$f(x)$	$g(x)$	$f(g(x))$	$f(x)+g(x)$
增 函 数	增 函 数		
增 函 数	减 函 数		
减 函 数	减 函 数		
减 函 数	增 函 数		

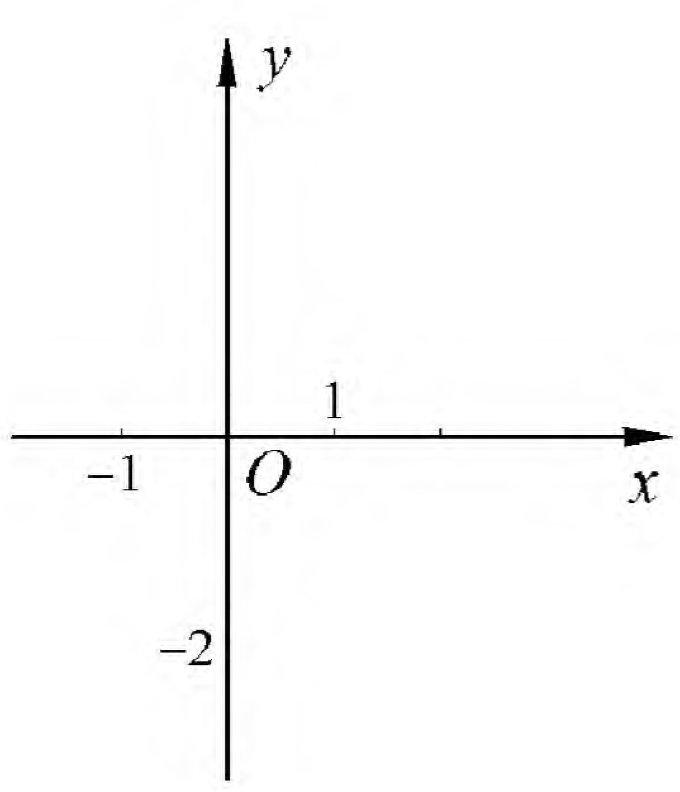
12. 借助计算器画函数 $f(x)=x^3$ 的图象，并求函数的单调区间.

13. (1) 函数 $y=f(x)$ 与 $y=f(-x)$ 的图象之间有什么关系？

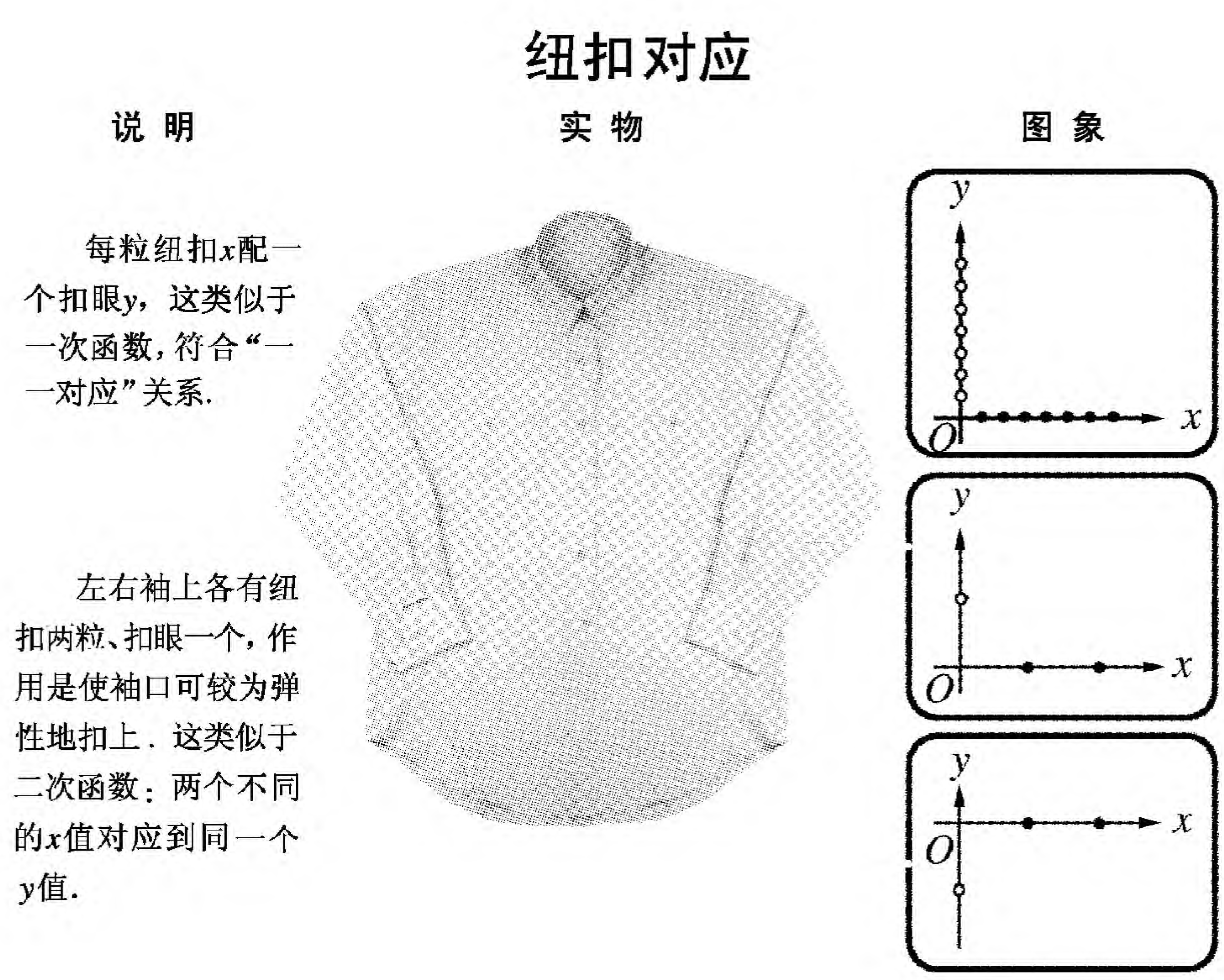
(2) 已知函数 $f(x)=x^2-2x-1$ 的图象如图所示，画出下列函数的图象：

① $y=f(-x)$；　② $y=-f(x)$；　③) $y=f(|x|)$；

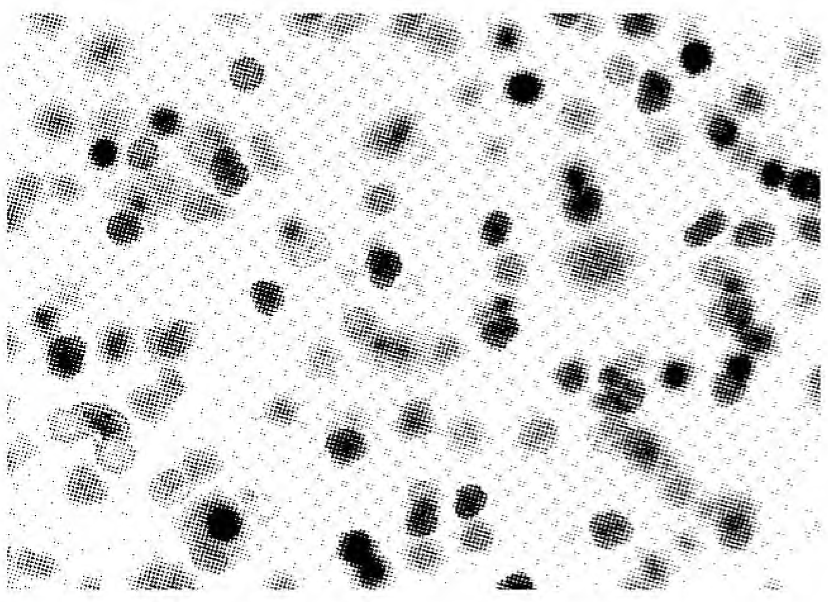
④ $y=f(x)+1$；　⑤ $y=|f(x)|$；　⑥ $y=f(x-2)$.



14. (阅读题)如图，小明同学在学习映射时，找到了生活中的一个实例——纽扣对应. 你能再举一些生活中与映射有关的例子吗？



指数函数



某细胞分裂时，由 1 个分裂成 2 个，2 个分裂成 4 个，4 个分裂成 8 个，……如果分裂一次需要 10 min，那么，1 个细胞 1 h 后分裂成多少个细胞？

假设细胞分裂的次数为 x，相应的细胞个数为 y，则

$$y = 2^x.$$

当 $x = 6$ 时，

$$y = 2^6 = 64,$$

即 1 个细胞 1 h 后分裂成 64 个细胞.

在上述例子中，x 只能取正整数. 我们还知道对于式子 2^x，x 取负整数和 0 也是有意义的. 那么，x 能取分数甚至无理数吗？

为了解决上述问题，我们先来探讨分数指数幂的意义.

我们知道，如果 $x^2 = a$，那么 x 称为 a 的 　　　(quadratic root)；如果 $x^3 = a$，那么 x 称为 a 的 　　　(cubic root).

一般地，如果一个实数 x 满足 $x^n = a$ $(n > 1,\ n \in \mathbf{N}^*)$，那么称 x 为 a 的 　　　　　　(n-th root).

当 n 为奇数时，正数的 n 次实数方根是一个正数，负数的 n 次实数方根是一个负数. 这时，a 的 n 次实数方根只有一个，记为 $x = \sqrt[n]{a}$，例如，

$$3^3 = 27 \Rightarrow 3 = \sqrt[3]{27};$$

$$(-2)^3 = -8 \Rightarrow -2 = \sqrt[3]{-8};$$

$$x^3 = 6 \Rightarrow x = \sqrt[3]{6}.$$

当 n 为偶数时，正数的 n 次实数方根有两个，它们互为相反数. 这时，正数 a 的正的 n 次实数方根用符号 $\sqrt[n]{a}$ 表示，负的 n 次实数方根用符号 $-\sqrt[n]{a}$ 表示，它们可以合并写成 $\pm\sqrt[n]{a}$ $(a > 0)$ 的形式，例如，

$$x^4 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{6};$$

$$x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}.$$

需要注意的是，　　　　　　　　　　　　.

求下列各式的值：

(1) $(\sqrt{5})^2$； (2) $(\sqrt[3]{-2})^3$；

(3) $\sqrt[4]{(-2)^4}$； (4) $\sqrt{(3-\pi)^2}$.

(1) $(\sqrt{5})^2=5$. (2) $(\sqrt[3]{-2})^3=-2$.

(3) $\sqrt[4]{(-2)^4}=\sqrt[4]{2^4}=2$.

(4) $\sqrt{(3-\pi)^2}=\sqrt{(\pi-3)^2}=\pi-3$.

$(\sqrt[n]{a})^n=$__________，$\sqrt[n]{a^n}=$__________.

观察下面的变形：

$$(2^5)^2=2^{10}\Rightarrow\sqrt{2^{10}}=2^5,$$

$$5=\frac{10}{2}\Rightarrow\sqrt{2^{10}}=2^{\frac{10}{2}}.$$

类似地，

$$\sqrt[3]{3^{12}}=3^{\frac{12}{3}},$$

$$\sqrt[5]{3^{15}}=3^{\frac{15}{5}},$$

……

这表明，当 m 被 n 整除时，就有 $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$.

一般地，我们规定

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\ (a>0,\ m,\ n\text{ 均为正整数}).$$

这就是正数 a 的正分数指数幂的意义. 由此可知，$2^{\frac{1}{2}}$ 的意义为

$$2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}.$$

仿照负整数指数幂的意义，我们规定

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}\ (a>0,\ m,\ n\text{ 均为正整数}),$$

且

有了分数指数幂的意义以后，指数幂的概念就从整数指数推广到有理数指数. 对有理数指数幂，原整数指数幂的运算性质保持不变，即

$$a^s a^t=a^{s+t}, \quad ①$$

$$(a^s)^t=a^{st}, \quad ②$$

$$(ab)^t=a^tb^t, \quad ③$$

其中 $s,\ t\in\mathbf{Q},\ a>0,\ b>0$.

求值：

(1) $100^{\frac{1}{2}}$；　　(2) $8^{\frac{2}{3}}$；

(3) $9^{-\frac{3}{2}}$；　　(4) $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}$.

(1) $100^{\frac{1}{2}}=(10^2)^{\frac{1}{2}}=10^{2\times\left(\frac{1}{2}\right)}=10$.

(2) $8^{\frac{2}{3}}=(2^3)^{\frac{2}{3}}=2^{3\times\frac{2}{3}}=2^2=4$.

(3) $9^{-\frac{3}{2}}=(3^2)^{-\frac{3}{2}}=3^{-3}=\frac{1}{27}$.

(4) $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}=(3^{-4})^{-\frac{3}{4}}=3^3=27$.

用分数指数幂的形式表示下列各式($a>0$)：

(1) $a^2\sqrt{a}$；　　(2) $\sqrt{a\sqrt{a}}$.

(1) $a^2\sqrt{a}=a^2a^{\frac{1}{2}}=a^{2+\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{2}}$.

(2) $\sqrt{a\sqrt{a}}=(a\sqrt{a})^{\frac{1}{2}}=(aa^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=(a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{3}{4}}$.

我们已将指数式 a^x 中的指数 x 从整数推广到分数(有理数)，是否还可以将指数推广到无理数呢？例如，“$2^{\sqrt{2}}$”有意义吗？

利用计算器，可以计算出下表中的数值：

x	2^x	用计算器计算 2^x 的值
1	2^1	2
1.4	$2^{1.4}$	2.639 015 821 …
1.41	$2^{1.41}$	2.657 371 628 …
1.414	$2^{1.414}$	2.664 749 650 …
1.414 2	$2^{1.4142}$	2.665 119 088 …
⋮	⋮	⋮
$\sqrt{2}$	?	?

随着 x 的取值越来越接近于$\sqrt{2}$，2^x 的值也越来越接近于一个实数，我们把这个实数记为 $2^{\sqrt{2}}$.

一般地，当 $a>0$ 且 x 是一个无理数时，a^x 也是一个确定的实数. 有理数指数幂的运算性质对实数指数幂同样适用.

1. 用根式的形式表示下列各式 ($a>0$)：

(1) $a^{\frac{1}{5}}$；　　(2) $a^{\frac{3}{4}}$；

(3) $a^{\frac{7}{5}}$；　　(4) $a^{-\frac{3}{2}}$.

2. 用分数指数幂的形式表示下列各式：

(1) $\sqrt[3]{x^2}$；　　(2) $\sqrt{x^4y^3}$ $(y>0)$；

(3) $\dfrac{m^2}{\sqrt{m}}(m>0)$.

3. 求值：

(1) $25^{\frac{3}{2}}$；

(2) $\left(\dfrac{25}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$；

(3) $2\sqrt{3}\times\sqrt[3]{1.5}\times\sqrt[6]{12}$.

4. 化简下列各式：

(1) $a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{4}}a^{-\frac{3}{8}}(a>0)$；

(2) $(x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{3}})^6(x>0,\ y>0)$；

(3) $(x^{\frac{3}{2}}y)^2\div(xy^{\frac{2}{3}})$ $(x>0,\ y>0)$.

1. 求值：

(1) $\sqrt{10^4}$；　　(2) $\sqrt[5]{(-0.1)^5}$；

(3) $\sqrt[6]{(x-y)^6}$ $(x>y)$；　　(4) $\sqrt[3]{-(2x+y)^3}$.

2. 用分数指数幂表示下列各式 $(a>0,\ b>0)$：

(1) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}$；　　(2) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$；

(3) $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{a^3}$；　　(4) $(\sqrt[3]{a})^2\cdot\sqrt{ab^3}$.

3. 用计算器求值：

(1) $5^{\frac{1}{3}}$；　　(2) $321^{\frac{2}{3}}$；

(3) $25.8^{\frac{3}{4}}$；　　(4) $723^{\frac{5}{3}}$.

4. 计算 $(a>0,\ b>0)$：

(1) $a^{\frac{2}{3}}a^{\frac{3}{4}}\div a^{\frac{5}{6}}$；

(2) $(a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{3}{4}})^{12}$；

(3) $4a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}}\div\left(-\dfrac{2}{3}a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}\right)$；

(4) $(2a^{\frac{1}{2}}+3b^{-\frac{1}{4}})(2a^{\frac{1}{2}}-3b^{-\frac{1}{4}})$；

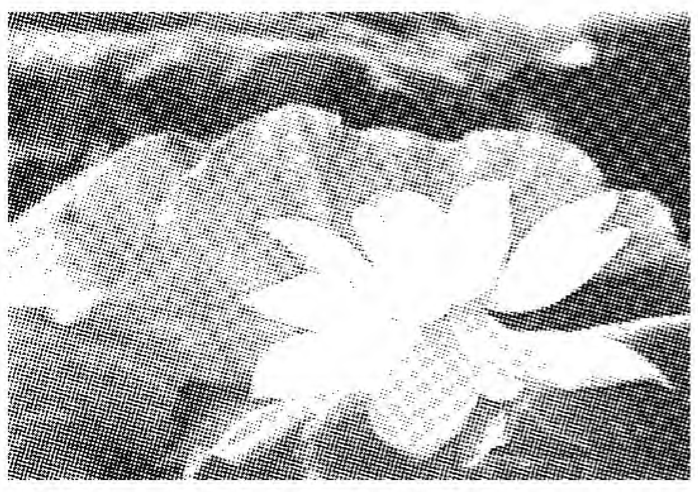
(5) $(a^2-2+a^{-2})\div(a^2-a^{-2})$；

(6) 若 $a+a^{-1}=3$，求 $a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}$ 及 $a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}$ 的值.

5. 利用指数的运算法则，解下列方程：

(1) $2\times4^x=16$；　　(2) $4^{3x+2}=256\times8^{1-x}$；

(3) $2x^{\frac{3}{4}}-1=15$；　　(4) $2^{x+2}-6\times2^{x-1}-8=0$.



从我国辽东半岛普兰店附近的泥炭中发掘出的古莲子至今大部分还能发芽开花，这些古莲子是多少年以前的遗物呢？

要测定古物的年代，可以用放射性碳法：在动物的体内都含有微量的放射性^{14}C. 动物死亡后，停止了新陈代谢，^{14}C不再产生，且原有的^{14}C会自动衰变. 经过5 570年（^{14}C的半衰期），它的残余量只有原始量的一半. 经过科学测定，若^{14}C的原始含量为1，则经过x年后的残留量为

$$y=a^x,$$

这里a为常数，$0<a<1$.

函数$y=a^x$与第2.2节开头的函数$y=2^x$具有哪些相同的特征？

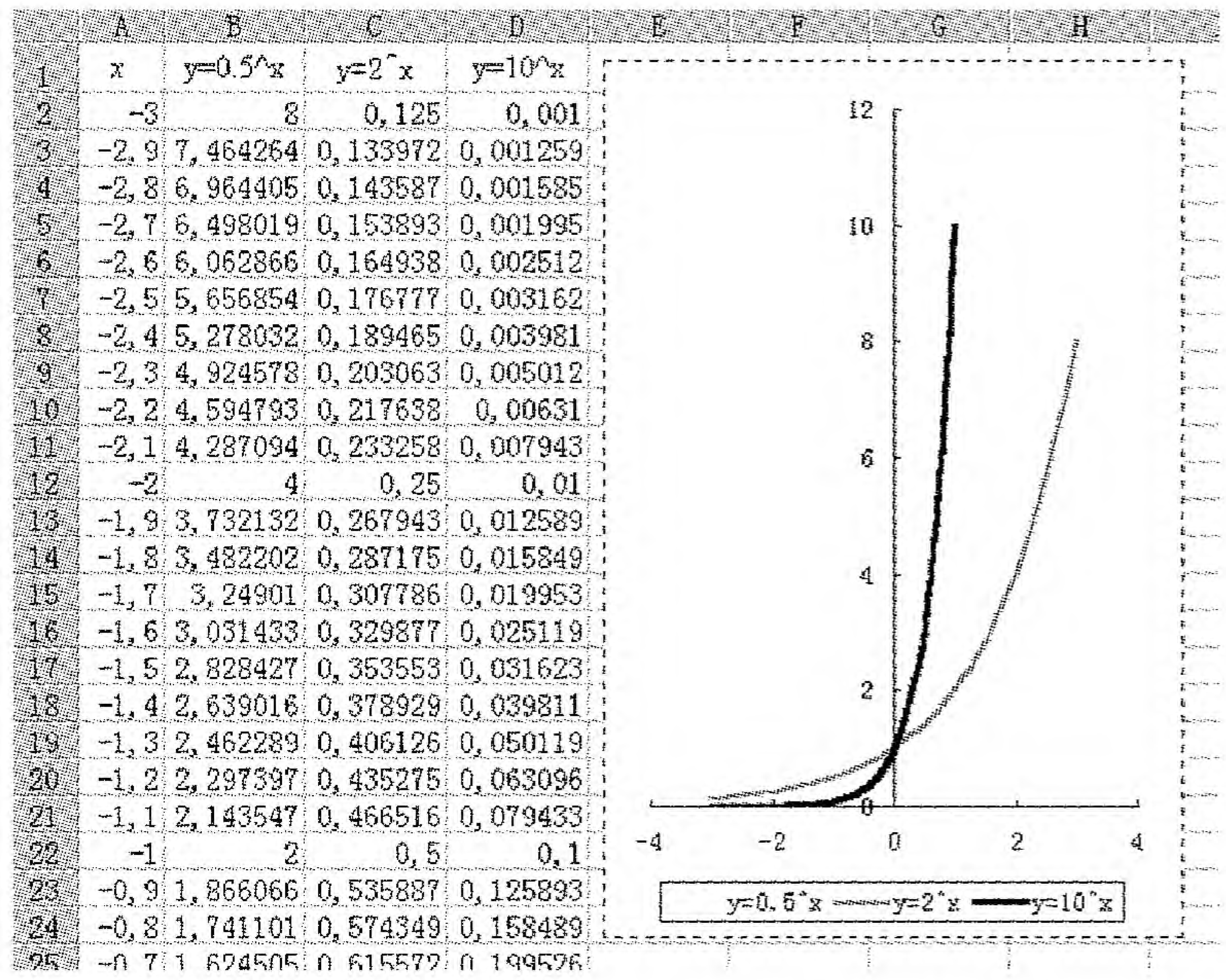
一般地，函数

$$y=a^x\ (a>0,\ a\neq 1)$$

叫做**指数函数**（exponential function），它的定义域是**R**.

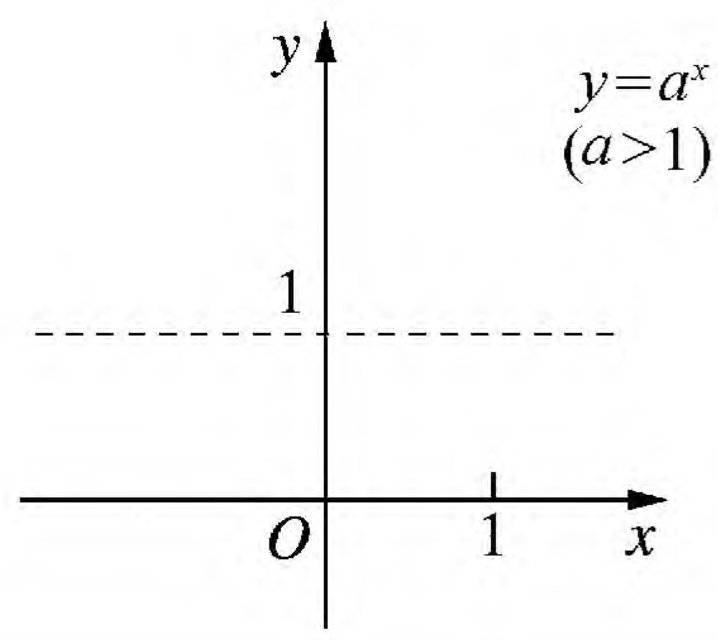
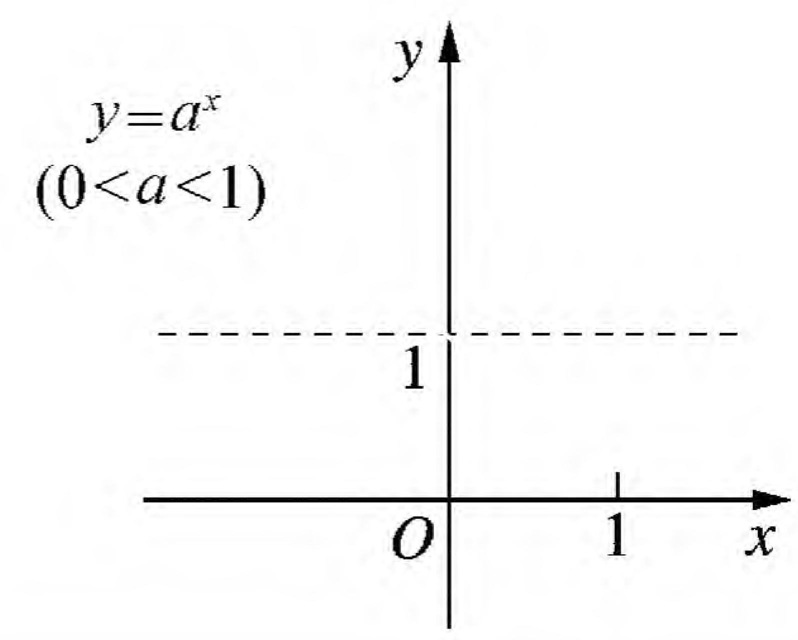
函数$y=x^2$与函数$y=2^x$有什么区别？

在图2－2－1中，我们同时画出了指数函数$y=10^x$，$y=2^x$和$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$的图象. 观察图2－2－1，我们可以发现指数函数的性质如表2－2－1所示.



	A	B	C	D
1	x	y=0.5^x	y=2^x	y=10^x
2	-3	8	0,125	0,001
3	-2,9	7,464264	0,133972	0,001259
4	-2,8	6,964405	0,143587	0,001585
5	-2,7	6,498019	0,153893	0,001995
6	-2,6	6,062866	0,164938	0,002512
7	-2,5	5,656854	0,176777	0,003162
8	-2,4	5,278032	0,189465	0,003981
9	-2,3	4,924578	0,203063	0,005012
10	-2,2	4,594793	0,217638	0,00631
11	-2,1	4,287094	0,233258	0,007943
12	-2	4	0,25	0,01
13	-1,9	3,732132	0,267943	0,012589
14	-1,8	3,482202	0,287175	0,015849
15	-1,7	3,24901	0,307786	0,019953
16	-1,6	3,031433	0,329877	0,025119
17	-1,5	2,828427	0,353553	0,031623
18	-1,4	2,639016	0,378929	0,039811
19	-1,3	2,462289	0,406126	0,050119
20	-1,2	2,297397	0,435275	0,063096
21	-1,1	2,143547	0,466516	0,079433
22	-1	2	0,5	0,1
23	-0,9	1,866066	0,535887	0,125893
24	-0,8	1,741101	0,574349	0,158489
25	-0,7	1,624505	0,615572	0,199526

表 2-2-1　指数函数 $y=a^x$ 的图象与性质

<table>
<tr><td></td><td>$a>1$</td><td>$0<a<1$</td></tr>
<tr><td>图象</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="4">性质</td><td colspan="2">(1) 定义域：R；</td></tr>
<tr><td colspan="2">(2) 值域：$(0,+\infty)$；</td></tr>
<tr><td colspan="2">(3) 图象过定点 $(0,1)$；</td></tr>
<tr><td>(4) 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数；</td><td>在 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数.</td></tr>
</table>

(1) 在画图过程中，你还发现了指数函数的其他性质吗？

(2) 函数 $y=2^x$ 与 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象有怎样的关系？进一步地，你能得到什么结论？

比较大小：

(1) $1.5^{2.5}$，$1.5^{3.2}$；

(2) $0.5^{-1.2}$，$0.5^{-1.5}$；

(3) $1.5^{0.3}$，$0.8^{1.2}$.

(1) 考虑指数函数 $f(x)=1.5^x$. 因为

$$1.5>1,$$

所以 $f(x)=1.5^x$ 在 **R** 上是增函数. 因为

$$2.5<3.2,$$

所以

$$1.5^{2.5}<1.5^{3.2}.$$

(2) 考虑指数函数 $g(x)=0.5^x$. 因为

$$0<0.5<1,$$

所以 $g(x)=0.5^x$ 在 **R** 上是减函数. 因为

$$-1.2>-1.5,$$

所以

$$0.5^{-1.2}<0.5^{-1.5}.$$

(3) 由指数函数的性质知 $1.5^{0.3}>1.5^{0}=1$，而

$$0.8^{1.2}<0.8^{0}=1,$$

所以

$$1.5^{0.3}>0.8^{1.2}.$$

(1) 已知 $3^{x}\geqslant 3^{0.5}$，求实数 x 的取值范围；

(2) 已知 $0.2^{x}<25$，求实数 x 的取值范围.

(1) 因为 $3>1$，

所以指数函数 $f(x)=3^{x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

由 $3^{x}\geqslant 3^{0.5}$，可得 $x\geqslant 0.5$，即 x 的取值范围为 $[0.5,+\infty)$.

(2) 因为 $0<0.2<1$，

所以指数函数 $f(x)=0.2^{x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数. 因为

$$25=\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}=0.2^{-2},$$

所以

$$0.2^{x}<0.2^{-2}.$$

由此可得 $x>-2$，即 x 的取值范围为 $(-2,+\infty)$.

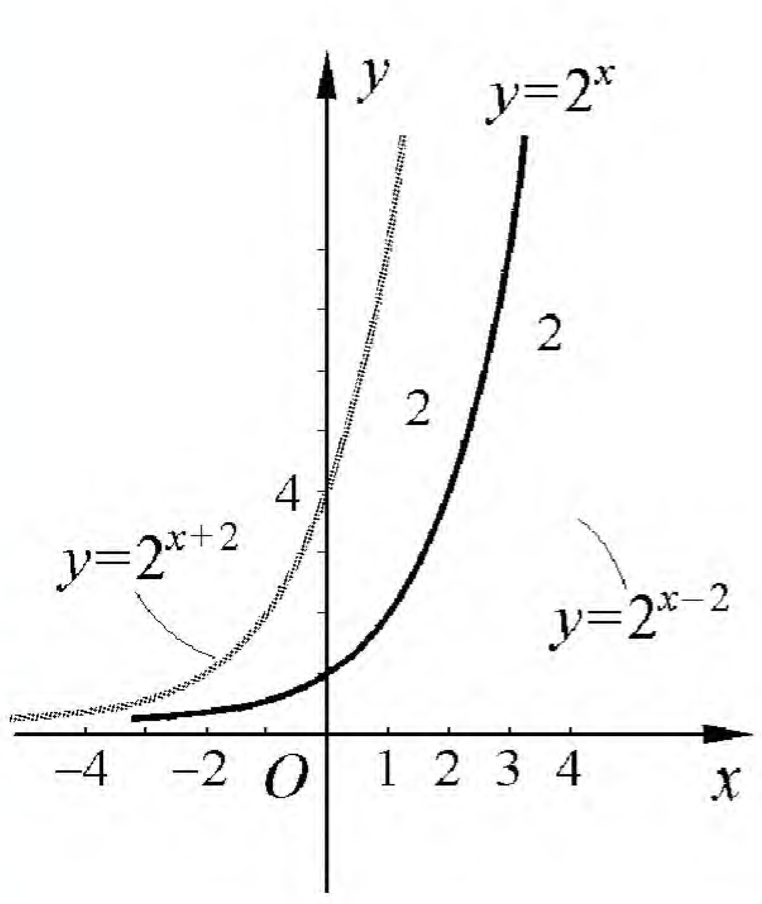
说明下列函数的图象与指数函数 $y=2^{x}$ 的图象的关系，并画出它们的示意图：

(1) $y=2^{x-2}$；　　　　(2) $y=2^{x+2}$.

比较函数 $y=2^{x}$ 与函数 $y=2^{x-2}$，$y=2^{x+2}$ 的取值关系，列表如下：

表 2-2-2

x	$y=2^{x-2}$	$y=2^{x}$	$y=2^{x+2}$
⋮	⋮	⋮	⋮
-4	2^{-6}	2^{-4}	$\boxed{2^{-2}}$
-3	2^{-5}	2^{-3}	$\boxed{2^{-1}}$
-2	2^{-4}	$\boxed{2^{-2}}$	$\boxed{2^{0}}$
-1	2^{-3}	$\boxed{2^{-1}}$	2^{1}
0	$\boxed{2^{-2}}$	$\boxed{2^{0}}$	2^{2}
1	$\boxed{2^{-1}}$	2^{1}	2^{3}
2	$\boxed{2^{0}}$	2^{2}	2^{4}
⋮	⋮	⋮	⋮



由此可知，函数 $y=2^{x-2}$ 中 $x=a+2$ 对应的 y 值与函数 $y=2^x$ 中 $x=a$ 对应的 y 值相等，所以将指数函数 $y=2^x$ 的图象向右平移 2 个单位长度，就得到函数 $y=2^{x-2}$ 的图象.

同样地，函数 $y=2^{x+2}$ 中 $x=a-2$ 对应的 y 值与函数 $y=2^x$ 中 $x=a$ 对应的 y 值相等，所以将指数函数 $y=2^x$ 的图象向左平移 2 个单位长度，就得到函数 $y=2^{x+2}$ 的图象. 这些函数的图象如图 2－2－2 所示.

函数 $y=a^{x+h}$ 与函数 $y=a^x(a>0,\ a\neq 1)$ 的图象之间有什么关系？

1. 如果指数函数 $f(x)=(a-1)^x$ 是 **R** 上的减函数，那么 a 的取值范围是（　　）.

A. $a<2$　　　　B. $a>2$

C. $1<a<2$　　　　D. $0<a<1$

2. 比较下列各题中两个值的大小：

(1) $3.1^{0.5}$，$3.1^{2.3}$；

(2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-0.3}$，$\left(\frac{2}{3}\right)^{-0.24}$；

(3) $2.3^{-2.5}$，$0.2^{-0.1}$.

3. 求下列函数的定义域：

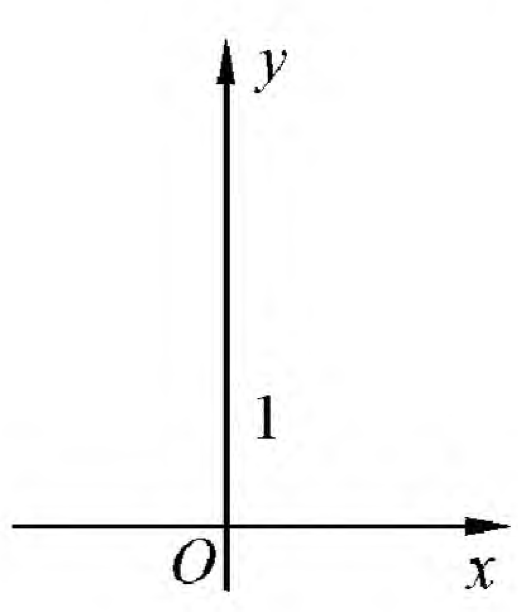
(1) $y=2^{\frac{1}{x}}$；　　　　(2) $y=3^{\sqrt{x}}$.

4. 求满足下列条件的实数 x 的范围：

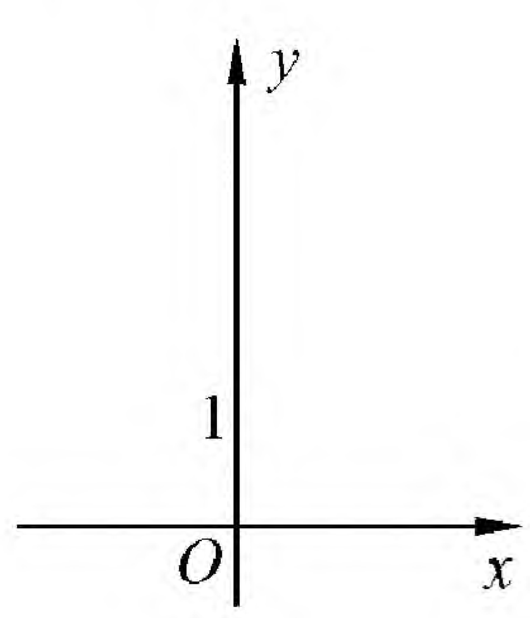
(1) $2^x>8$；　　　　(2) $3^x<\frac{1}{27}$；

(3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x>\sqrt{2}$；　　　　(4) $5^x<3^x$.

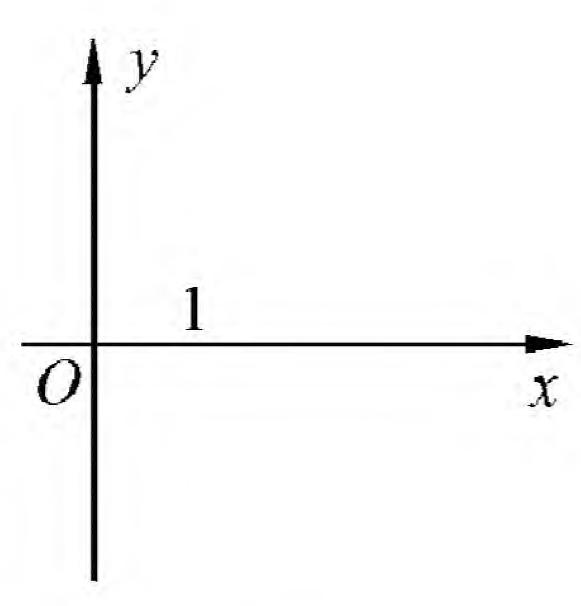
5. 函数 $y=2^{-x}$ 的图象为（　　）.



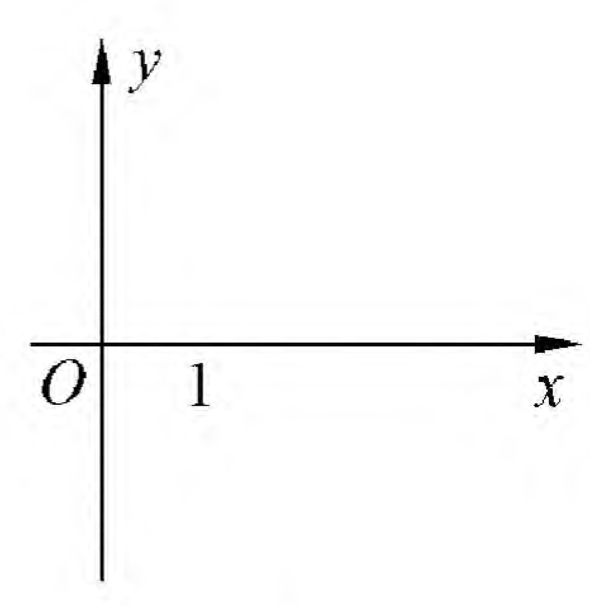
A.



B.



C.



D.

某种放射性物质不断变化为其他物质，每经过一年，这种物质剩留的质量是原来的 84%. 写出这种物质的剩留量关于时间的函数关系式.

设该物质最初的质量是 1，经过 x 年剩留量是 y.

经过 1 年，剩留量

$$y=1\times 0.84=0.84^1;$$

经过2年,剩留量

$$y = 0.84 \times 0.84 = 0.84^2;$$

……

一般地,经过x年,剩留量

$$y = 0.84^x \quad (x > 0).$$

某种储蓄按复利计算利息,若本金为a元,每期利率为r,设存期是x的本利和(本金加上利息)为y元.

(1) 写出本利和y随存期x变化的函数关系式;

(2) 如果存入本金1 000元,每期利率为2.25%,试计算5期后的本利和.

(1) 已知本金为a元,利率为r,则

1期后的本利和为

$$y = a + a \times r = a(1+r),$$

2期后的本利和为

$$y = a(1+r) + a(1+r)r = a(1+r)^2,$$

3期后的本利和为

$$y = a(1+r)^3,$$

……

x期后的本利和为

$$y = a(1+r)^x,\ x \in \mathbf{N}^*,$$

即本利和y随存期x变化的函数关系式为

$$y = a(1+r)^x, x \in \mathbf{N}^*.$$

(2) 将$a = 1\,000$(元),$r = 2.25\%$,$x = 5$代入上式,得

$$y = 1\,000 \times (1 + 2.25\%)^5$$

$$= 1\,000 \times 1.022\,5^5$$

$$\approx 1\,117.68(\text{元}),$$

即5期后本利和约为1 117.68元.

在例5中,请借助计算器解答下列问题:

(1) 第几期后本利和超过本金的1.5倍?

(2) 要使10期后本利和翻一番,利率应为多少(精确到0.001)?

2000～2002 年，我国国内生产总值年平均增长7.8%左右. 按照这个增长速度，画出从 2000 年开始我国年国内生产总值随时间变化的图象，并通过图象观察到 2010 年我国年国内生产总值约为 2000 年的多少倍(结果取整数).

设 2000 年我国年国内生产总值是 1，x 年后我国年国内生产总值为 y. 因为国内生产总值年平均增长 7.8%，所以从 2001 年开始，每年的国内生产总值是上一年的 1.078 倍，则

经过 1 年，

$$y = 1 \times 1.078 = 1.078;$$

经过 2 年，

$$y = 1.078 \times 1.078 = 1.078^2;$$

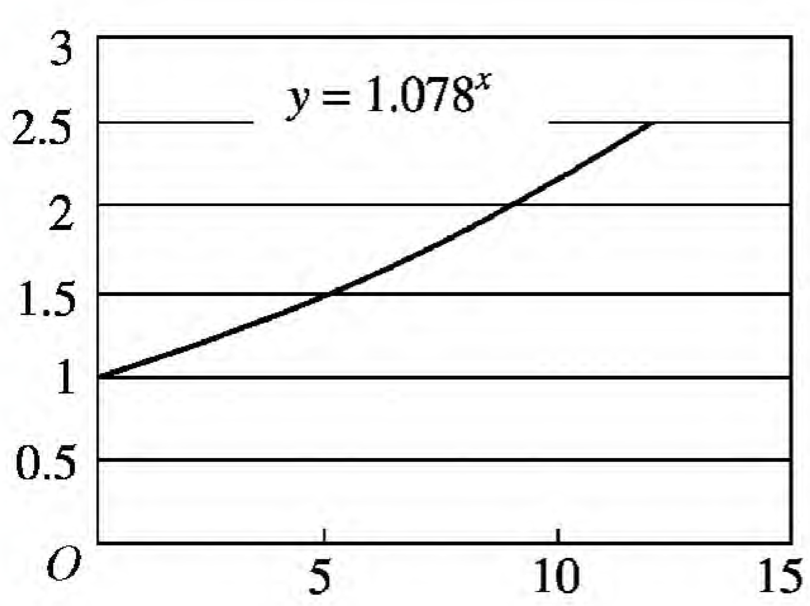
经过 3 年，

$$y = 1.078^2 \times 1.078 = 1.078^3;$$

……

一般地，经过 x 年，我国年国内生产总值

$$y = 1.078^x, x \in \mathbf{N}^*.$$



画出指数函数 $y = 1.078^x$ 的图象，如图 2-2-3 所示. 从图象上看出，当 $x = 10$ 时，$y \approx 2$.

到 2010 年我国年国内生产总值约为 2000 年的 2 倍.

在日常生活中，还有许多问题可以归结为指数函数问题加以解决.

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y = 2^{x-1}$；

(2) $y = 0.3^{2-x^2}$.

2. 已知下列不等式，试比较 m, n 的大小：

(1) $2^m < 2^n$；

(2) $0.2^m < 0.2^n$；

(3) $a^m < a^n$ $(0 < a < 1)$.

3. (1) 一电子元件厂去年生产某种规格的电子元件 a 个，计划从今年开始的 m 年内，每年生产此种规格电子元件的产量比上一年增长 $p\%$，试写出此种规格电子元件的年产量随年数变化的函数关系式；

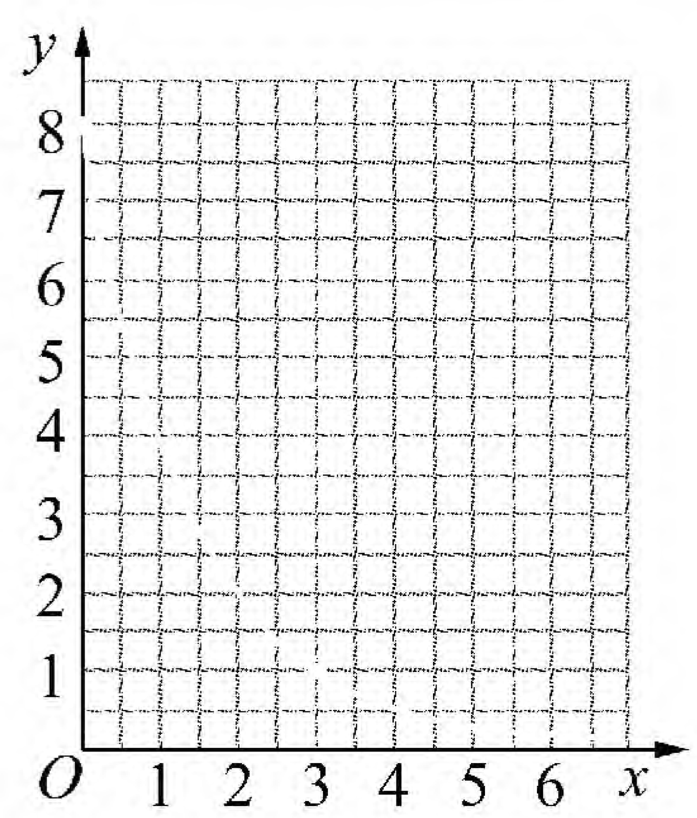
(2) 一电子元件厂去年生产某种规格电子元件的成本是 a 元 / 个，计划从今年开始的 m 年内，每年生产此种规格电子元件的单件成本比上一年下降 $p\%$，试写出这种规格电子元件的单件成本随年数变化的函数关系式.

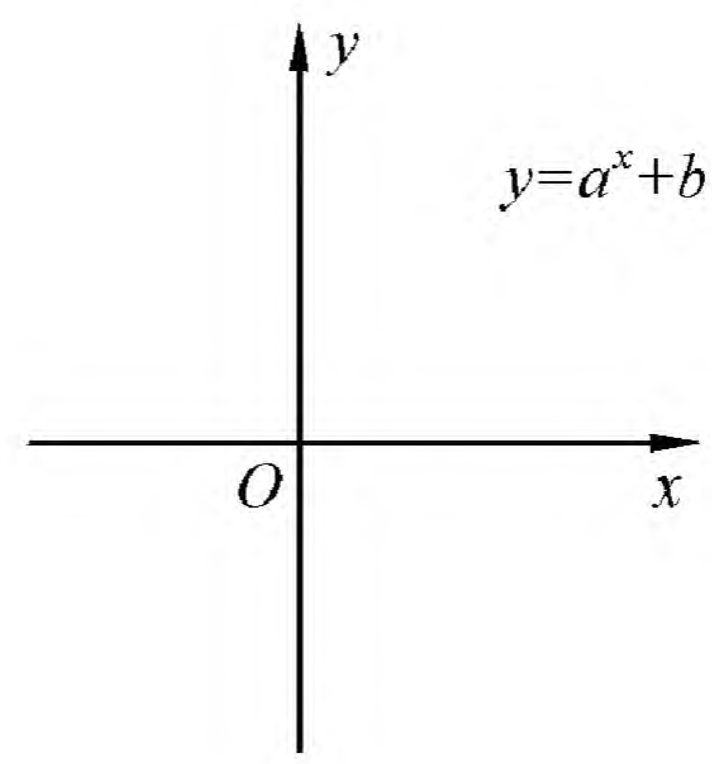
4. 有些家用电器(如冰箱等)使用了氟化物,氟化物的释放破坏了大气上层的臭氧层,使臭氧含量 Q 呈指数函数型变化,在氟化物排放量维持某种水平时,具有关系式 $Q = Q_0 e^{-0.0025t}$,其中 Q_0 是臭氧的初始量.

(1) 随时间 t 的增加,臭氧的含量是增加还是减少?

(2) 多少年以后将会有一半的臭氧消失(用计算器计算)?

5. 试根据函数 $y = ka^{-x}$ 的图象,求出 k 和 a.





6. 已知函数 $y = a^x + b$ 的图象如图所示,求 a, b 的取值范围.

7. 已知函数 $f(x) = a + \dfrac{1}{4^x + 1}$ 是奇函数,求常数 a 的值.

8. 解下列不等式:

(1) $9^x > 3^{x-2}$;

(2) $3 \times 4^x - 2 \times 6^x > 0$.

9. 镭是一种放射性物质,每经过一年后有 2.1%变化为其他物质.画出镭的剩余量随时间变化的图象,并从图象上求出大约经过多少年,剩余量是原来的 90%(结果保留整数).

10. 已知函数 $f(x) = \dfrac{2^x - 1}{2^x + 1}$,试讨论函数 $f(x)$的单调性.

11. 已知 $y = f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且 $x < 0$ 时,$f(x) = 1 + 2^x$,你能画出此函数的图象吗?

12. 对于任意的 x_1, $x_2 \in \mathbf{R}$,若函数 $f(x) = 2^x$,试比较 $\dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ 与 $f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)$ 的大小关系.

对数函数

在第 2.2.2 节的例 4 中，我们研究了一种放射性物质不断变化为其他物质的过程. 设该物质最初的质量是 1，则经过 x 年，该物质的剩留量

$$y = 0.84^x.$$

由此，知道了经过的时间 x，就能求出该物质的剩留量 y；反过来，知道了该物质的剩留量 y，怎样求出所经过的时间 x 呢？

特别地，经过多少年这种物质的剩留量为原来的一半？

上述问题也就是求满足 $0.84^x = 0.5$ 中的 x，此时问题就转化为已知底数和幂的值求指数的问题.

一般地，如果 $a(a>0, a\neq 1)$ 的 b 次幂等于 N，即

$$a^b = N,$$

那么就称 b 是以 a 为底 N 的**对数**(logarithm)，记作

$$\log_a N = b,$$

其中，a 叫做对数的**底数**(base of logarithm)，N 叫做**真数**(proper number).

由对数的定义可知，$a^b = N$ 与 $b = \log_a N$ 两个等式所表示的是 a，b，N 三个量之间的同一个关系. 例如，

$$3^2 = 9 \Leftrightarrow \log_3 9 = 2;$$

$$\log_4 2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4^{\frac{1}{2}} = 2.$$

根据对数的定义，要解决本节开头提出的问题，就只要计算 $\log_{0.84} 0.5$ 的值.

将下列指数式改写成对数式：

(1) $2^4=16$；　　(2) $3^{-3}=\dfrac{1}{27}$；

(3) $5^a=20$；　　(4) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^b=0.45$.

(1) $\log_2 16=4$.

(2) $\log_3 \dfrac{1}{27}=-3$.

(3) $\log_5 20=a$.

(4) $\log_{\frac{1}{2}} 0.45=b$.

将下列对数式改写成指数式：

(1) $\log_5 125=3$；　　(2) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 3=-2$；

(3) $\log_{10} a=-1.699$.

(1) $5^3=125$.

(2) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-2}=3$.

(3) $10^{-1.699}=a$.

求下列各式的值：

(1) $\log_2 64$；　　(2) $\log_9 27$.

(1) 由 $2^6=64$，得

$$\log_2 64=6.$$

(2) 设 $x=\log_9 27$，则根据对数的定义知

$$9^x=27,$$

即

$$3^{2x}=3^3,$$

得

$$2x=3,$$

$$x=\frac{3}{2},$$

所以

$$\log_9 27=\frac{3}{2}.$$

通常将以 10 为底的对数称为　　　　(common logarithm)，如 $\log_{10} 2$，$\log_{10} 12$ 等. 为了方便起见，对数 $\log_{10} N$ 简记为 $\lg N$，如 $\lg 2$，$\lg 12$ 等.

在科学技术中，常常使用以 e 为底的对数，这种对数称为　　　　(natural logarithm)．$e = 2.71828\cdots$ 是一个无理数．正数 N 的自然对数 $\log_e N$ 一般简记为 $\ln N$，如 $\log_e 2$，$\log_e 15$ 分别记为 $\ln 2$，$\ln 15$ 等．

1. 根据对数的定义，写出下列各对数的值 ($a > 0$，且 $a \neq 1$)：

$\log_{10} 100 = \underline{\qquad\qquad}$，　　$\log_{25} 5 = \underline{\qquad\qquad}$，

$\log_2 \dfrac{1}{2} = \underline{\qquad\qquad}$，　　$\log_5 1 = \underline{\qquad\qquad}$，

$\log_3 3 = \underline{\qquad\qquad}$，　　$\log_{\frac{1}{3}} 3 = \underline{\qquad\qquad}$，

$\log_a 1 = \underline{\qquad\qquad}$，　　$\log_a a = \underline{\qquad\qquad}$．

2. 填空：

题 号	指 数 式	对 数 式
(1)	$2^4 = 16$	$\log_2 16 = 4$
(2)	$3^{-3} = \dfrac{1}{27}$	
(3)		$\log_5 25 = a$

3. 将下列指数式改写成对数式：

(1) $3^5 = 243$；　　(2) $2^{-8} = \dfrac{1}{256}$．

4. 将下列对数式改写成指数式：

(1) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 4 = -4$；　　(2) $\lg 10\,000 = 4$；

(3) $\lg a = 0.4771$；　　(4) $\ln 12 = b$．

5. 利用计算器计算下列对数的值(结果保留 4 位小数)：

(1) $\log_3 4$；　　(2) $\log_2 5$；

(3) $\ln 1.2$；　　(4) $\lg 0.6$．

6. 已知 $a > 0, a \neq 1$，$N > 0$，$b \in \mathbf{R}$．

(1) $\log_a a^2 = \underline{\qquad\qquad}$，　　$\log_a a^5 = \underline{\qquad\qquad}$，

$\log_a a^{-3} = \underline{\qquad\qquad}$，　　$\log_a a^{\frac{1}{5}} = \underline{\qquad\qquad}$，

……

一般地，$\log_a a^b = \underline{\qquad\qquad}$，请证明这个结论；

(2) 证明：$a^{\log_a N} = N$．

我们知道,指数幂运算有下列性质:

$$a^m a^n = a^{m+n};$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};$$

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

根据对数的定义,有

$$\log_a N = b \Leftrightarrow a^b = N\ (a > 0,\ a \neq 1,\ N > 0),$$

那么,对数运算也有相应的性质吗?

仔细观察表 2 - 3 - 1 中的数据:

表 2 - 3 - 1

	A	B	C	D	E	F
1	M	N	$\log_2 M$	$\log_2 N$	$\log_2(MN)$	$\log_2(\frac{M}{N})$
2	27.92138432	19.98809778	4.803298566	4.321069276	9.124367842	0.48222929
3	31.38523515	13.97137364	4.972014113	3.804401966	8.776416078	1.167612147
4	2.185125278	45.70909757	1.127715995	5.514409431	6.642125426	-4.38669344
5	17.383343	40.43244728	4.119633649	5.337441624	9.457075273	-1.21780798
6	47.65923032	0.057985168	5.574683748	-4.108172269	1.466511479	9.682856016
7	36.03320414	27.37052522	5.171255039	4.774551214	9.945806254	0.396703825
8	44.22284616	30.13245033	5.466719974	4.913246091	10.37996606	0.553473883
9	10.82338939	35.00167852	3.43608045	5.129352204	8.565432654	-1.69327175
10	44.15723136	5.290383618	5.464577813	2.403372339	7.867950153	3.061205474
11	30.08972442	34.09833064	4.911198988	5.091629205	10.00282819	-0.18043022

从表 2 - 3 - 1 中,我们可以验证,对数运算有如下性质:

$$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N, \qquad ①$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N, \qquad ②$$

其中 $a > 0,\ a \neq 1,\ M > 0,\ N > 0$.

现在我们来证明性质①.

设 $\log_a M = p,\ \log_a N = q$, 由对数的定义得

$$M = a^p,\ N = a^q,$$

所以

$$MN = a^p a^q = a^{p+q},$$

故

$$\log_a(MN) = p + q = \log_a M + \log_a N,$$

即

$$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N.$$

请仿照性质①的证明方法证明性质②.

我们还可以得到：

当 $a>0, a\neq 1, M>0$ 时，

$$\log_a M^n = n\log_a M,\ n\in\mathbf{R}.$$

求下列各式的值：

(1) $\log_2(2^3\times 4^5)$；　　(2) $\log_5 125$.

(1) $\log_2(2^3\times 4^5)$

$=\log_2 2^3+\log_2 4^5$

$=3+5\log_2 4$

$=3+5\times 2=13.$

(2) $\log_5 125$

$=\log_5 5^3=3\log_5 5=3.$

已知 $\lg 2\approx 0.3010$，$\lg 3\approx 0.4771$，求下列各式的值(结果保留 4 位小数)：

(1) $\lg 12$；　　(2) $\lg\dfrac{27}{16}$.

(1) $\lg 12$

$=\lg(2^2\times 3)=\lg 2^2+\lg 3=2\lg 2+\lg 3$

$\approx 2\times 0.3010+0.4771=1.0791.$

(2) $\lg\dfrac{27}{16}$

$=\lg 3^3-\lg 2^4=3\lg 3-4\lg 2$

$\approx 3\times 0.4771-4\times 0.3010=0.2273.$

1. 用 $\lg x$，$\lg y$，$\lg z$ 表示下列各式：

(1) $\lg(xy^2z^3)$；　　(2) $\lg\dfrac{\sqrt{x}}{yz^2}$.

2. 求值：

(1) $\log_3(9\times 27)$；　　(2) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(4^5\times 8^2)$；

(3) $\lg 25+\lg 4$；　　(4) $\log_{\frac{1}{3}}27-\log_{\frac{1}{3}}9$.

3. 利用计算器计算(结果保留 4 位小数)：

(1) $\log_5 8$；　　(2) $\log_{0.5}12$.

4. 已知 $\lg 2=a$，$\lg 3=b$，试用 a，b 表示下列各对数：

(1) $\lg 108$；　　(2) $\lg\dfrac{18}{25}$.

5. 不用计算器，求值：

(1) $\lg\sqrt{2}+\lg\sqrt{5}$；　　(2) $\log_3 45-\log_3 5$.

试用常用对数表示 $\log_3 5$.

设 $t=\log_3 5$，则 $3^t=5$.

两边取常用对数，得

$$\lg 3^t=\lg 5,$$

即

$$t\lg 3=\lg 5,$$

所以

$$t=\frac{\lg 5}{\lg 3},$$

故

$$\log_3 5=\frac{\lg 5}{\lg 3}.$$

一般地，我们有

$$\log_a N=\frac{\log_c N}{\log_c a},$$

其中 $N>0$，$a>0$，$c>0$，且 $a\neq 1$，$c\neq 1$. 这个公式称为对数的

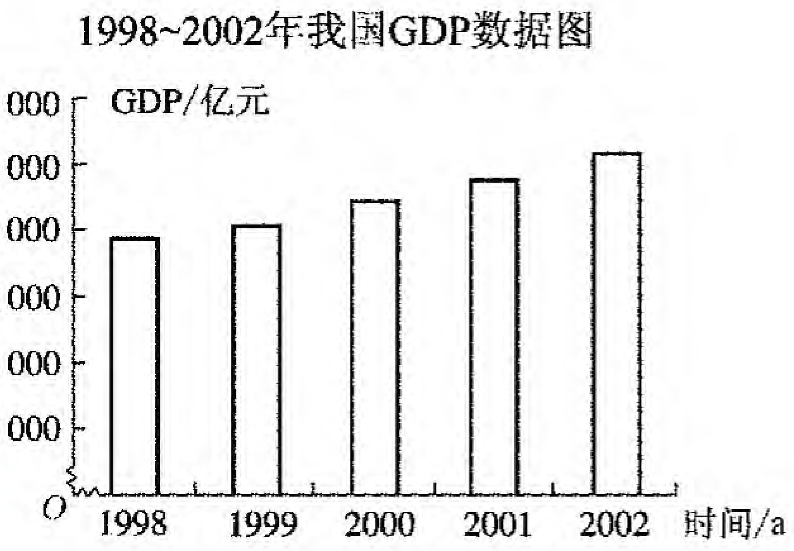
(change of base formula).

求 $\log_8 9\times\log_3 32$ 的值.

$$\log_8 9\times\log_3 32$$

$$=\frac{\lg 9}{\lg 8}\times\frac{\lg 32}{\lg 3}=\frac{2\lg 3}{3\lg 2}\times\frac{5\lg 2}{\lg 3}=\frac{10}{3}.$$

1998~2002年我国GDP数据图



如图 2-3-1，2000 年我国国内生产总值(GDP)为 89 442 亿元. 如果我国 GDP 年均增长 7.8%左右，按照这个增长速度，在 2000 年的基础上，经过多少年以后，我国 GDP 才能实现比 2000 年翻两番的目标？

假设经过 x 年实现 GDP 比 2000 年翻两番的目标，根据题意，得

$$89\,442\times(1+7.8\%)^x=89\,442\times 4,$$

即

$$1.078^x=4,$$

故

$$x=\log_{1.078}4=\frac{\lg 4}{\lg 1.078}\approx 18.5.$$

约经过 19 年以后，我国 GDP 才能实现比 2000 年翻两番的目标.

在本章第 2.2.2 节的开头问题中，已知测得出土的古莲子中 ^{14}C 的残余量占原来的 87.9%，试推算古莲子的生活年代.

根据本章第 2.2.2 节的讨论，可以设经过 x 年后的残余量是 $y=a^x$，$0<a<1$.

由 ^{14}C 的半衰期是 5 570 年，即 $x=5\,570$ 时，$y=\frac{1}{2}$ 得

$$\frac{1}{2}=a^{5\,570}.$$

两边取对数，得

$$\lg\frac{1}{2}=5\,570\lg a,$$

$$\lg a=-\frac{\lg 2}{5\,570}.$$

所以，由 $y=87.9\%=0.879$ 可知，

$$0.879=a^x,$$

$$x\lg a=\lg 0.879,$$

从而

$$x\times\left(-\frac{\lg 2}{5\,570}\right)=\lg 0.879,$$

$$x=-\frac{5\,570\times\lg 0.879}{\lg 2}\approx 1\,040,$$

故古莲子约是 1 040 年前的遗物.

回到本节开始提出的问题，用计算器计算，得

$$\log_{0.84}0.5=\frac{\lg 0.5}{\lg 0.84}\approx 4.$$

结论是：约经过 4 年以后，物质的剩留量是原来的一半.

对数是由苏格兰数学家纳皮尔(J. Napier，1550～1617)发明的，纳皮尔为了简化天文学问题的球面三角计算，在没有指数概念的情况下发明了对数，并于1614年在《论述对数的奇迹》中，介绍了他的方法和研究成果.

18世纪的欧拉(Euler，1707～1783)深刻地揭示了指数与对数的密切联系，他曾说“对数源出于指数”.

在纳皮尔著作发表40年后，对数传入我国，logarithm 一词被译成比例数. 后又逐步演变成对数，意指“对(照)表中的数”. 清代数学家戴煦(1805～1860)等，经过独立的刻苦研究，也取得了很多成就.

现在通用的"常用对数",是与纳皮尔同时期的英国数学家布里格斯(H. Briggs, 1561～1630)引入的,并于1617年出版了常用对数表. 1622年英国数学家皮德尔(Speidell)给出了以e为底的自然对数表.

恩格斯在他的著作《自然辩证法》中,曾经把笛卡儿的坐标系、纳皮尔的对数、牛顿和莱布尼茨的微积分共同称为17世纪的三大数学发明. 法国著名的数学家、天文学家拉普拉斯(P. S. Laplace, 1749～1827)曾说:对数可以缩短计算时间,"在实效上等于把天文学家的寿命延长了许多倍".

由此可见,对数的发明对人们研究科学和了解自然起了重大作用.

1. 利用换底公式,计算下列各式:

(1) $\log_2 5\times\log_5 4$;

(2) $\log_2 3\times\log_3 4\times\log_4 5\times\log_5 6\times\log_6 7\times\log_7 8$.

2. 求证:$\log_3 4=\dfrac{1}{\log_4 3}$.

3. 利用换底公式计算 $\log_2\dfrac{1}{25}\times\log_3\dfrac{1}{8}\times\log_5\dfrac{1}{9}$.

4. 利用计算器计算(结果保留4位小数):

(1) $\log_2 5+\lg 5$;　　(2) $\log_5 3.14-\log_7 3$;

(3) $\log_2\sqrt{3}\div\log_5 3$;　　(4) $\lg 2\times\log_3 10$.

1. 将下列指数式改写成对数式:

(1) $7^{-2}=\dfrac{1}{49}$;　　(2) $8^{\frac{5}{3}}=32$;

(3) $3^m=2$.

2. 将下列对数式改写成指数式:

(1) $\log_2 5=2.321\,9$;　　(2) $\lg 6=0.778\,2$;

(3) $\ln 10=2.302\,6$.

3. 利用对数的性质,求下列各式的值:

(1) $\log_3 81$;　　(2) $\log_4\dfrac{1}{64}$;

(3) $\log_{3.4}3.4$;　　(4) $\log_{0.45}1$;

(5) $\lg 125+\lg 8$;　　(6) $\log_2 56-\log_2 7$.

4. 利用计算器求值(结果保留4位小数):

(1) $\lg 36-\lg 4$;　　(2) $\lg 36\times\lg 9$;

(3) $2\lg 5\div 3\lg 2$;　　(4) $\lg\sqrt{3}$.

5. 不用计算器,求下列各式的值:

(1) $\log_4 8-\log_{\frac{1}{9}}3$;　　(2) $2\lg 4+\lg\dfrac{5}{8}$;

(3) $(\lg 5)^2+\lg 2\times\lg 50$.

6. 证明：对数换底公式 $\log_a N=\dfrac{\log_c N}{\log_c a}$ $(a>0,\ a\neq 1,\ N>0,\ c>0,\ c\neq 1)$.

7. 设 a，b 均为不等于 1 的正数，利用对数换底公式证明：

(1) $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$；

(2) $\log_{a^n} b^m=\dfrac{m}{n}\log_a b$ $(m\in\mathbf{R},\ n\in\mathbf{R},\ n\neq 0)$.

8. 我国计划 GDP 从 2000 年至 2010 年翻一番，平均每年的增长率应是多少？

9. （阅读题）对数可以将乘除运算转化为加减运算，通过对数转换，可以简化运算过程. 例如，1，10，100，1 000，10 000，…成 10 倍增长，取常用对数后就变为 0，1，2，3，4，….

我们再来看物理学中的一个例子. 声强是表示声波强度的物理量，可用公式 $I=\dfrac{1}{2}\rho v A^2\omega$ 表示，其中 v 表示声速，ω 和 A 分别是声波的频率和振幅，ρ 是媒质的密度.

由于声强的变化范围非常大，数量级可以相差很多，因此常采用对数标度，这就引入了声强级的概念，规定声强级 $L=\lg\dfrac{I}{I_0}$. 通常规定 $I_0=10^{-20}$ W/m^2（相当于频率为 1 000 Hz 时能够引起听觉的最弱的声强），这时计算出来的 L 就是声强 I 的量度，式中声强级的单位称为贝尔. 实际上，由于贝尔这个单位太大，通常采用贝尔的$\dfrac{1}{10}$作单位，这就是分贝(dB)：$L=10\lg\dfrac{I}{I_0}$(dB).

当被测量的声强 I 为声强 I_0 的 100 倍时，声强级 L 为多少分贝？

x
$\downarrow$
$y=2^x$
$\downarrow$
y

我们知道某细胞分裂过程中，细胞个数 y 是分裂次数 x 的指数函数 $y=2^x$. 因此，知道 x 的值(输入值是分裂次数)，就能求出 y 的值(输出值是细胞个数). 现在我们来研究相反的问题：

知道了细胞个数 y，如何确定分裂次数 x?

为了求 $y=2^x$ 中的 x，我们将 $y=2^x$ 改写成对数式为

$$x=\log_2 y.$$

对于每一个给定的 y 值，都有一个惟一的 x 值与之对应. 把 y 看做自变量，x 就是 y 的函数. 这样就得到了一个新的函数.

x
$\uparrow$
$x=\log_2 y$
$\uparrow$
y

前面提到的放射性物质，经过的时间 x(年)与物质剩留量 y 的关系为

$$y=0.84^x,$$

写成对数式为

$$x=\log_{0.84} y.$$

类似地，y 是自变量，x 是 y 的函数.

习惯上，仍用 x 表示自变量，用 y 表示它的函数. 这样，上面两个函数就分别写成 $y=\log_2 x$ 和 $y=\log_{0.84} x$.

一般地，函数

$$y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq 1)$$

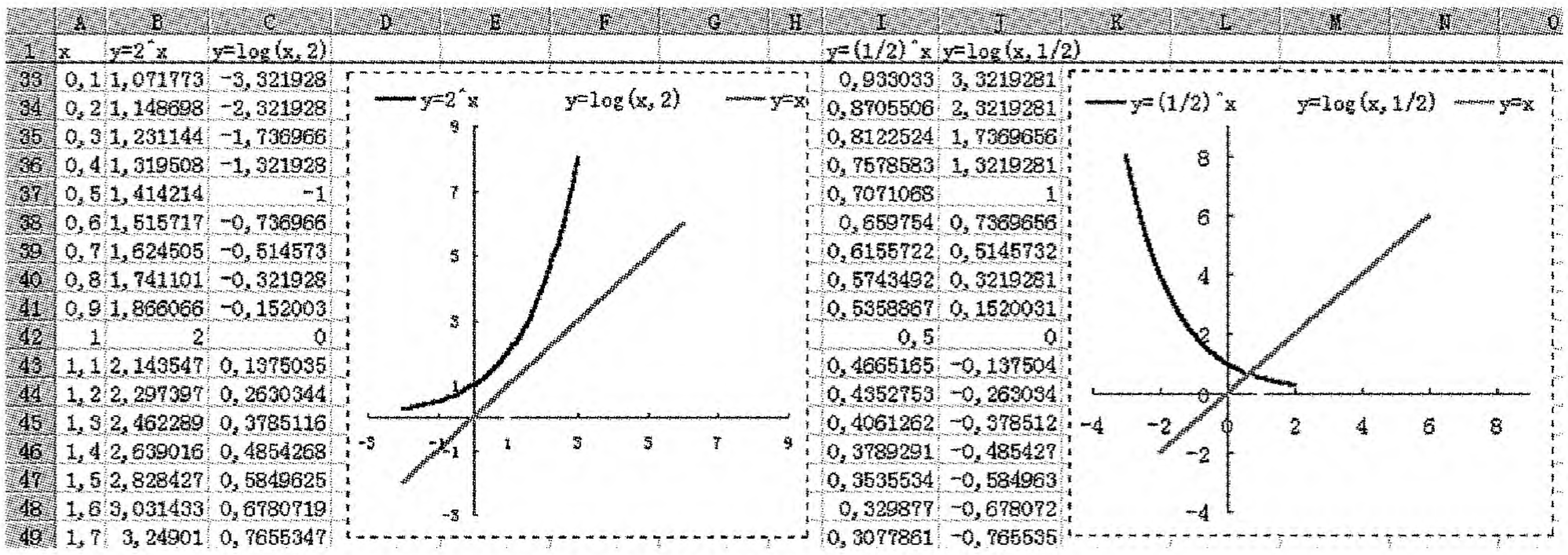
叫做**对数函数**(logarithmic function)，它的定义域是$(0,\ +\infty)$.

函数 $y=\log_a x$ 与函数 $y=a^x(a>0,\ a\neq 1)$ 的定义域、值域之间有什么关系?

画出下列两组函数的图象，并观察各组函数的图象，寻找它们之间的关系：

① $y=2^x$，$y=\log_2 x$；

② $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，$y=\log_{\frac{1}{2}} x$.



由图 2－3－2 可以看出，函数 $y=2^x$ 与 $y=\log_2 x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的图象也关于直线 $y=x$ 对称.

一般地，当 $a>0$，$a\neq 1$ 时，函数 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 的图象有什么关系？

观察图 2－3－3 中的函数的图象，对照指数函数的性质，你发现对数函数 $y=\log_a x$ 有哪些性质？

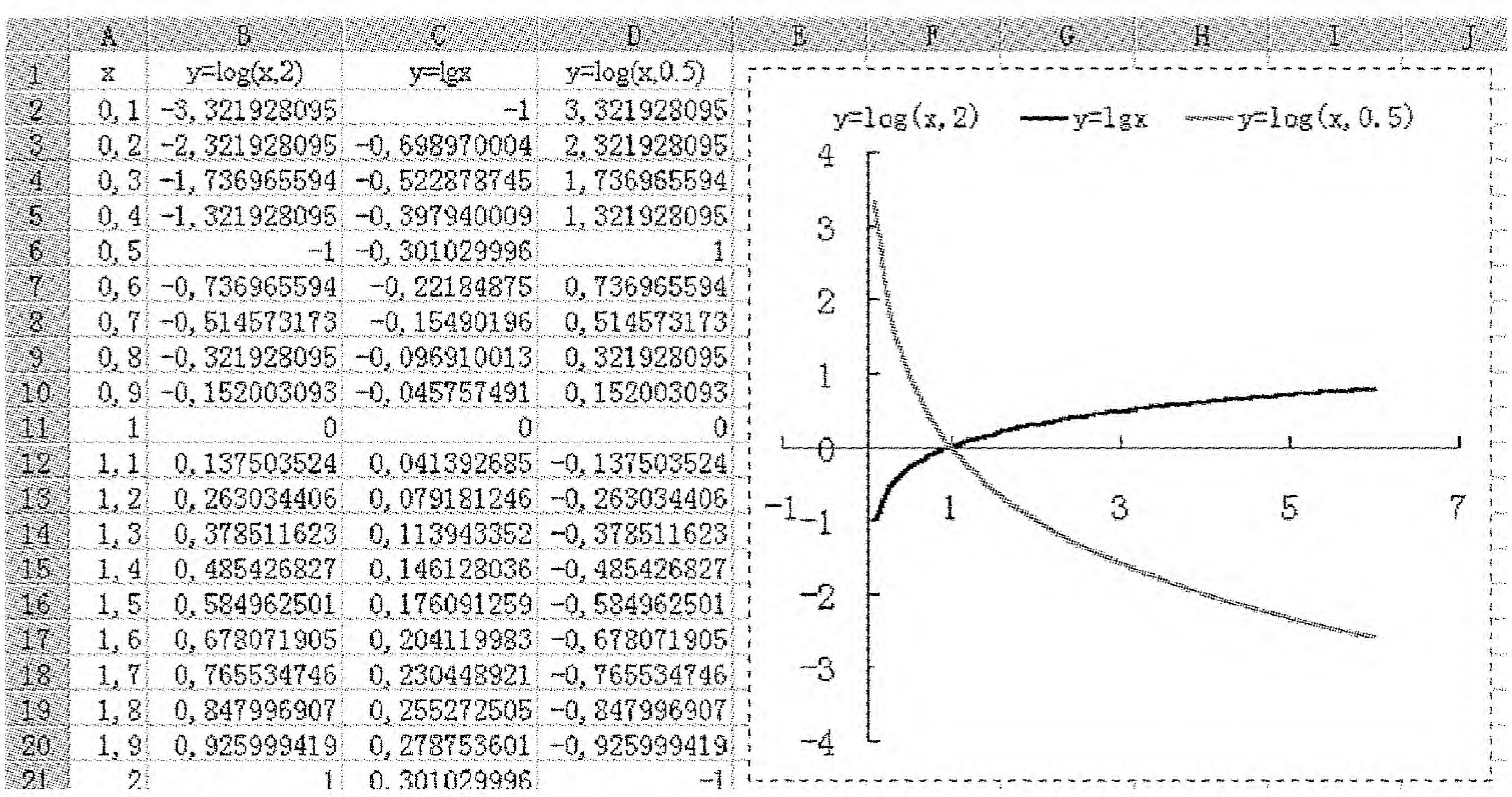
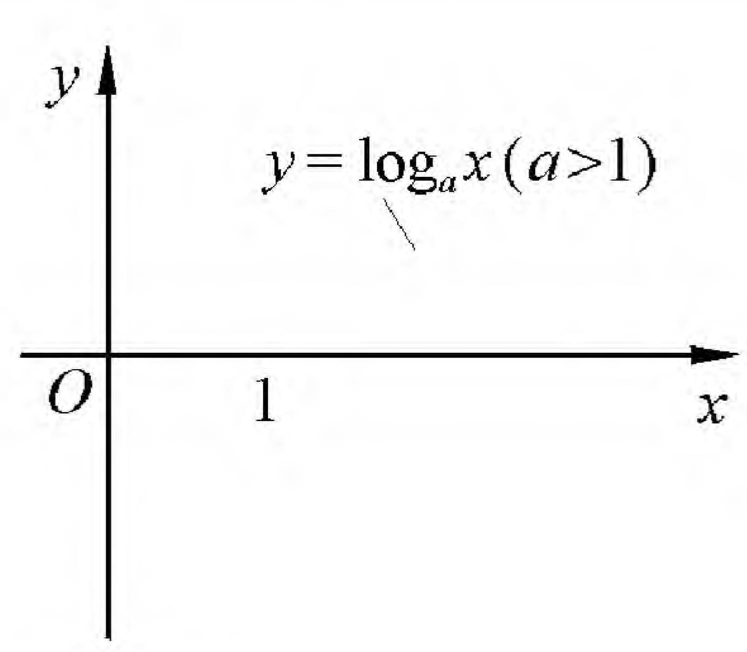
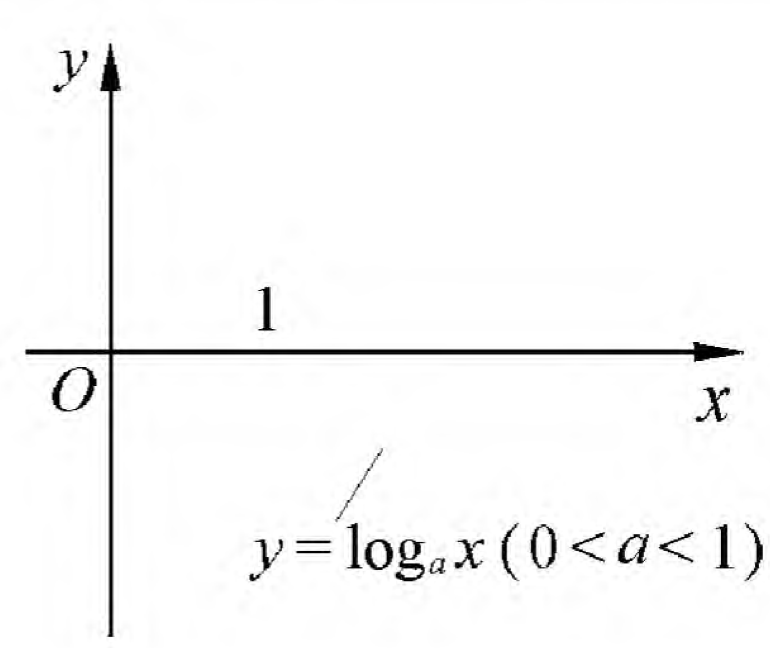


表 2－3－2　对数函数的图象与性质

	$a>1$	$0<a<1$
图象		

（续　表）

	$a>1$	$0<a<1$
性质	(1) 定义域：$(0,+\infty)$；	
	(2) 值域：$\mathbf{R}$；	
	(3) 图象过点$(1,0)$；	
	(4) 在$(0,+\infty)$上是单调增函数；	在$(0,+\infty)$上是单调减函数.

$y=a^x$ 称为 $y=\log_a x$ 的反函数，反之，$y=\log_a x$ 也称为 $y=a^x$ 的反函数. 一般地，如果函数 $y=f(x)$ 存在反函数，那么它的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$.

求下列函数的定义域：

(1) $y=\log_{0.2}(4-x)$；

(2) $y=\log_a\sqrt{x-1}$ $(a>0,\ a\neq1)$.

(1) 因为当 $4-x>0$ 时，即 $x<4$ 时，$\log_{0.2}(4-x)$有意义；当 $x\geqslant4$ 时，$\log_{0.2}(4-x)$没有意义，所以函数 $y=\log_{0.2}(4-x)$ 的定义域是$(-\infty,4)$.

(2) 因为当$\sqrt{x-1}>0$ 时，即 $x>1$ 时，$\log_a\sqrt{x-1}$ 有意义；当 $x\leqslant1$ 时，$\log_a\sqrt{x-1}$ 没有意义，所以函数 $y=\log_a\sqrt{x-1}$ 的定义域是$(1,+\infty)$.

利用对数函数的性质，比较下列各组数中两个数的大小：

(1) $\log_2 3.4$，$\log_2 3.8$；

(2) $\log_{0.5}1.8$，$\log_{0.5}2.1$；

(3) $\log_7 5$，$\log_6 7$.

(1) 考察函数 $y=\log_2 x$.

因为它的底数是 2，且 $2>1$，
所以它在$(0,+\infty)$上是单调增函数.

又因为

$$0<3.4<3.8,$$

所以

$$\log_2 3.4<\log_2 3.8.$$

(2) 考察函数 $y=\log_{0.5}x$.

因为它的底数是 0.5，且 $0<0.5<1$，
所以它在$(0,+\infty)$上是单调减函数.

又因为

$$0 < 1.8 < 2.1,$$

所以

$$\log_{0.5}1.8 > \log_{0.5}2.1.$$

(3) 考察函数 $y=\log_7 x$.

因为它的底数是 7,且 $7>1$,

所以它在 $(0, +\infty)$ 上是单调增函数.

又因为

$$0 < 5 < 7,$$

所以

$$\log_7 5 < \log_7 7 = 1.$$

同理,

$$\log_6 7 > \log_6 6 = 1,$$

所以

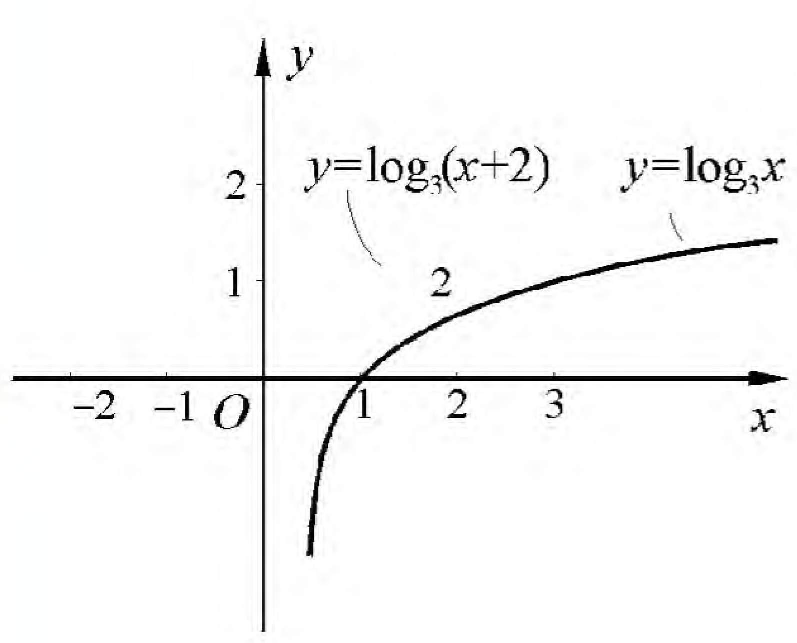
$$\log_7 5 < \log_6 7.$$

说明函数 $y=\log_3(x+2)$ 与函数 $y=\log_3 x$ 的图象的关系.

比较函数 $y=\log_3(x+2)$ 与 $y=\log_3 x$ 的取值关系,列表如下:

表 2-3-3

x	$y=\log_3 x$	$y=\log_3(x+2)$
⋮	⋮	⋮
-1	/	0
-0.5	/	$\log_3 1.5$
0	/	$\log_3 2$
1	0	1
1.5	$\log_3 1.5$	$\log_3 3.5$
2	$\log_3 2$	$\log_3 4$
3	1	$\log_3 5$
⋮	⋮	⋮



由此可知,函数 $y=\log_3(x+2)$ 中 $x=a-2$ 对应的 y 值与函数 $y=\log_3 x$ 中 $x=a$ 对应的 y 值相等,所以将对数函数 $y=\log_3 x$ 的图象向左平移 2 个单位长度,就得到函数 $y=\log_3(x+2)$ 的图象.

这两个函数的图象如图 2-3-4.

函数 $y=\log_a(x+b)$ 与函数 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1,\ b\neq 0)$ 的图象之间有什么关系？

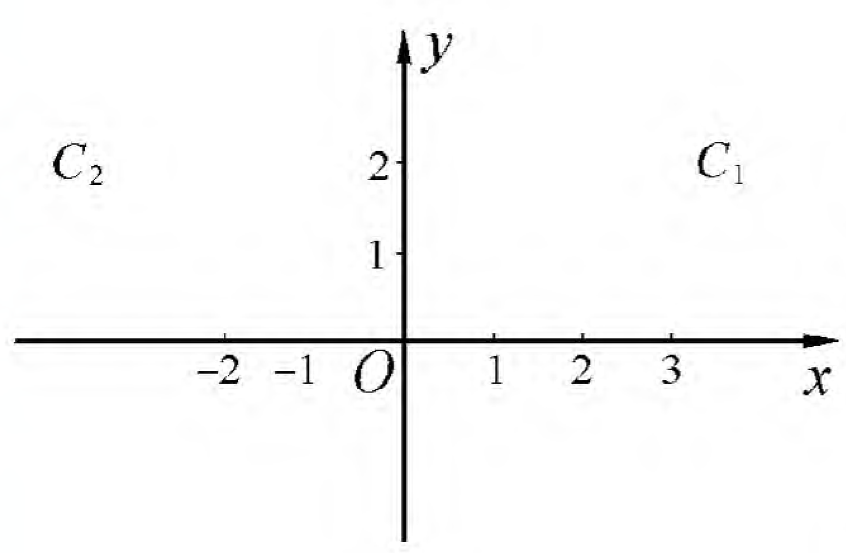
画出函数 $y=\log_2|x|$ 的图象，并由图象写出它的单调区间.

当 $x\neq 0$ 时，由于函数 $y=f(x)=\log_2|x|$ 满足

$$f(-x)=\log_2|-x|=\log_2|x|=f(x),$$

所以函数 $y=\log_2|x|$ 是偶函数. 它的图象关于 y 轴对称.

当 $x>0$ 时，$\log_2|x|=\log_2 x$.



因此，我们先画出函数 $y=\log_2 x$ $(x>0)$ 的图象 C_1，再作出 C_1 关于 y 轴对称的图形 C_2. C_1 和 C_2 构成函数 $y=\log_2|x|$ 的图象，如图 2-3-5.

由图象可以知道，函数 $y=\log_2|x|$ 的单调减区间是 $(-\infty,\ 0)$，单调增区间是 $(0,\ +\infty)$.

1. 画出函数 $y=\log_3 x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 的图象，指出这两个函数图象之间的关系.

2. 求下列函数的定义域，并画出函数的图象：

(1) $y=\log_2(2x+1)$；　　(2) $y=\lg\dfrac{1}{x-1}$.

3. 利用对数函数的性质，比较下列各组数中两个数的大小：

(1) $\log_3 5.4$ 与 $\log_3 5.5$；　　(2) $\log_{\frac{1}{3}}\pi$ 与 $\log_{\frac{1}{3}}\mathrm{e}$；

(3) $\lg 0.02$ 与 $\lg 3.12$；　　(4) $\ln 0.55$ 与 $\ln 0.56$.

4. 解下列方程：

(1) $\log_2(3x)=\log_2(2x+1)$；

(2) $\log_5(2x+1)=\log_5(x^2-2)$；

(3) $\lg\sqrt{x-1}=\lg(x-1)$.

5. 解下列方程：

(1) $3^{3x+5}=27$；　　(2) $2^{2x}=12$；

(3) $3^{1-x}-2=0$.

我们已经知道，函数 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ 互为反函数. 一般说来，设 A，B 分别为函数 $y=f(x)$ 的定义域和值域，如果由函数 $y=f(x)$ 所解得的 $x=\varphi(y)$ 也是一个函数(即对任意一个 $y\in B$，都有惟一的 $x\in A$ 与之对应)，那么就称函数 $x=\varphi(y)$ 是函数 $y=f(x)$ 的　　(inverse function)，记作 $x=f^{-1}(y)$. 在 $x=f^{-1}(y)$ 中，y 是自变量，x 是 y 的函数. 习惯上常改写成 $y=f^{-1}(x)$ $(x\in B,\ y\in A)$ 的形式.

例如，求函数 $y=3x+6$ $(x\in\mathbf{R})$ 的反函数. 我们从 $y=3x+6$ 中解得 $x=\dfrac{y}{3}-2$ $(y\in\mathbf{R})$，它也是一个函数. 这样，函数 $y=3x+6$

($x \in \mathbf{R}$) 的反函数是 $y=\frac{x}{3}-2$ ($x \in \mathbf{R}$).

函数 $y=f(x)$ 的定义域 A 正好是它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的值域，函数 $y=f(x)$ 的值域 B 正好是它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域.

函数 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 的图象表明，互为反函数的两个函数的图象关于直线 $y=x$ 对称.

你能求出函数 $y=\log_2 \frac{1+x}{1-x}$ $(-1<x<1)$ 的反函数吗?

1. 画出函数 $y=\log_4 x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{4}} x$ 的图象，指出这两个函数图象之间的关系，并说明这两个函数性质的相同点与不同点.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\ln(3x-1)$；　　(2) $y=\log_4 \frac{2}{4x-3}$.

3. 利用对数函数的性质，比较下列各组数中两个数的大小：

(1) $\log_5 7.8$ 与 $\log_5 7.9$；

(2) $\log_{0.3} 3$ 与 $\log_{0.3} 2$；

(3) $\ln 0.32$ 与 $\lg 2$；

(4) $\log_6 5$ 与 $\log_7 8$.

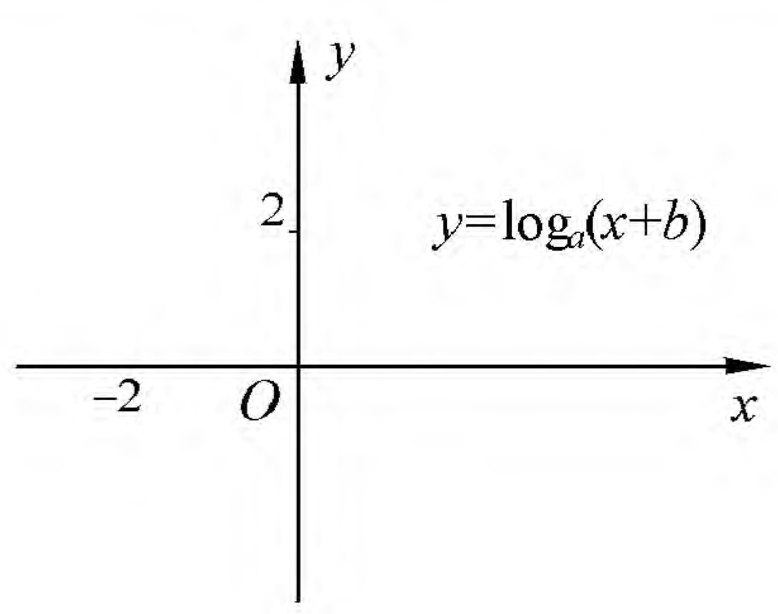
4. 求证：函数 $y=\log_{0.5}(3x-2)$ 在定义域上是单调减函数.

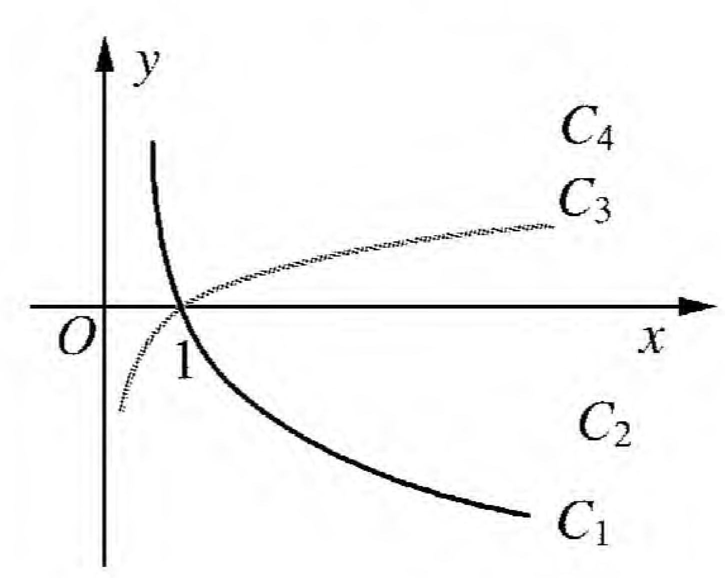
5. 求证：函数 $f(x)=\lg \frac{1-x}{1+x}$ $(-1<x<1)$ 是奇函数.

6. 画出函数 $y=\log_2(x+1)$ 与 $y=\log_2(x-1)$ 的图象，并指出这两个函数图象之间的关系.

7. 比较 $\log_2 5$，$\log_5 8$ 的大小.

8. 已知函数 $y=\log_a(x+b)$ 的图象如图所示，求 a 与 b 的值.





9. 如图，已知函数 $y=\log_a x$，$y=\log_b x$，$y=\log_c x$，$y=\log_d x$ 的图象分别是曲线 C_1，C_2，C_3，C_4，试判断 0，1，a，b，c，d 的大小关系，并用“$<$”连接起来.

10. 解下列方程：

(1) $2^{1-x}=5$；　　(2) $2\times 5^{x+1}-9=0$.

11. 解下列不等式：

(1) $5^{x+2}>2$；　　(2) $3^{3-x}<6$；

(3) $\log_3(x+2)>3$；　　(4) $\lg(x-1)<1$.

12. 对于任意的 x_1，$x_2\in(0,+\infty)$，若函数 $f(x)=\lg x$，试比较 $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 与 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$ 的大小关系.

幂函数

经调查，一种商品的价格和需求的关系如下表.

表 2-4-1

价格/元	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9
需求量/t	139.6	135.4	131.6	128.2	125.1	122.2	119.5

根据此表，我们可以得到价格 x 与需求量 y 之间近似地满足关系

$$y = 114.8746x^{-0.3815192}.$$

这个关系式与函数 $y = x^{-0.3815192}$ 是相关联的.

函数 $y = x^{-0.3815192}$ 是指数函数吗?

一般地，我们把形如

$$y = x^{\alpha}$$

的函数称为**幂函数**(power function)，其中 x 是自变量，α 是常数.

写出下列函数的定义域，并指出它们的奇偶性：

(1) $y = x^3$；

(2) $y = x^{\frac{1}{2}}$；

(3) $y = x^{-2}$.

(1) 函数 $y = x^3$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，它是奇函数.

(2) 函数 $y = x^{\frac{1}{2}}$ 即 $y = \sqrt{x}$，其定义域是 $[0, +\infty)$，它既不是奇函数，也不是偶函数.

(3) 函数 $y = x^{-2}$ 即 $y = \dfrac{1}{x^2}$，其定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$，它是偶函数.

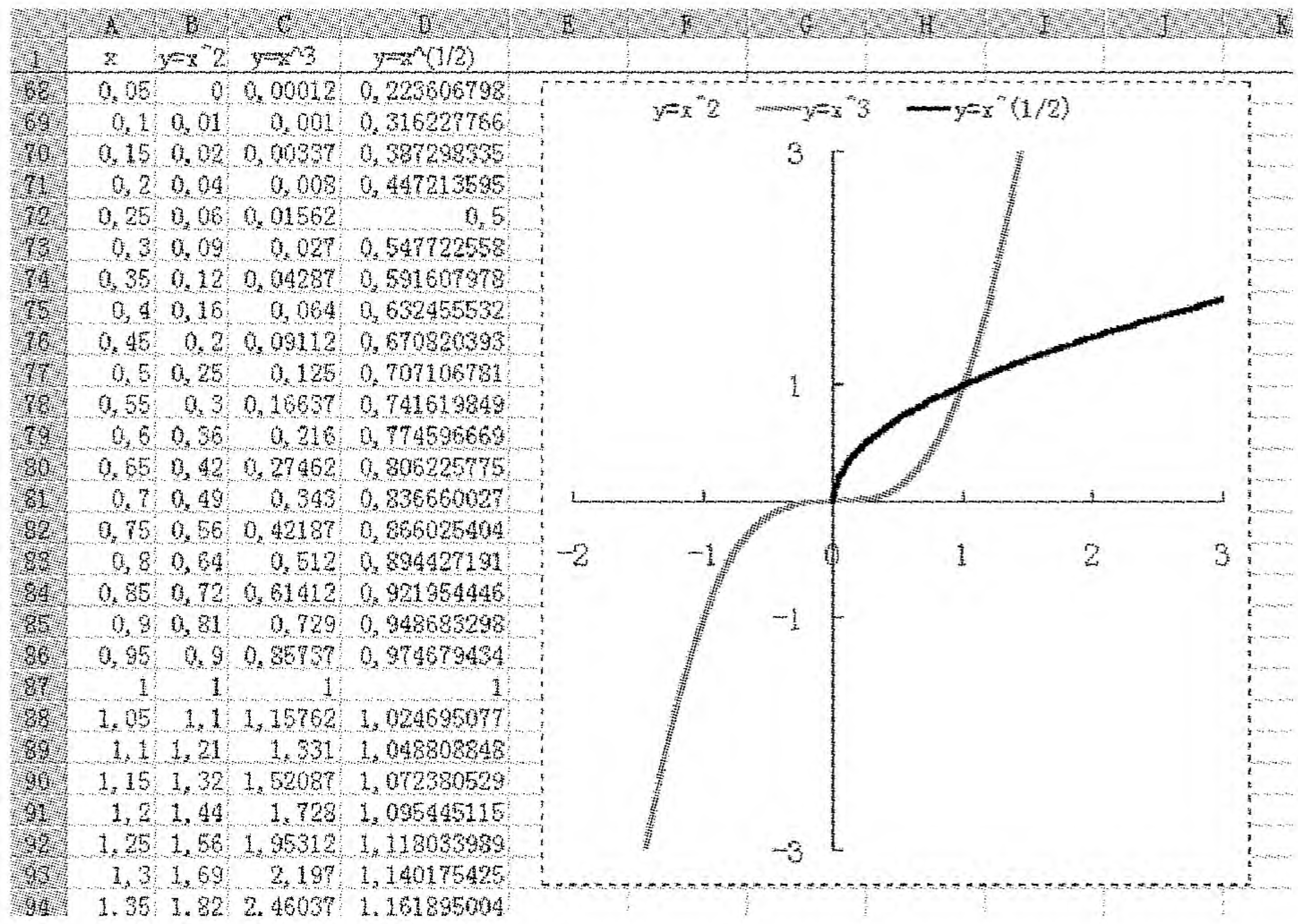
函数 $y = x^3$，$y = x^{\frac{1}{2}}$，$y = x^{-2}$ 的单调性如何?

在同一坐标系内画出幂函数 $y = x^2$，$y = x^3$，$y = x^{\frac{1}{2}}$ 的图象，如图 2-4-1 所示.

观察图象，你能找出这三个函数有什么共同特性吗?

（1）函数的图象都过点(0，0)和(1，1)；

（2）在第一象限内，函数的图象随 x 的增大而上升，函数在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增函数.



	A	B	C	D
1	x	y=x^2	y=x^3	y=x^(1/2)
68	0,05	0	0,00012	0,223606798
69	0,1	0,01	0,001	0,316227766
70	0,15	0,02	0,00337	0,387298335
71	0,2	0,04	0,008	0,447213595
72	0,25	0,06	0,01562	0,5
73	0,3	0,09	0,027	0,547722558
74	0,35	0,12	0,04287	0,591607978
75	0,4	0,16	0,064	0,632455532
76	0,45	0,2	0,09112	0,670820393
77	0,5	0,25	0,125	0,707106781
78	0,55	0,3	0,16637	0,741619849
79	0,6	0,36	0,216	0,774596669
80	0,65	0,42	0,27462	0,806225775
81	0,7	0,49	0,343	0,836660027
82	0,75	0,56	0,42187	0,866025404
83	0,8	0,64	0,512	0,894427191
84	0,85	0,72	0,61412	0,921954446
85	0,9	0,81	0,729	0,948683298
86	0,95	0,9	0,85737	0,974679434
87	1	1	1	1
88	1,05	1,1	1,15762	1,024695077
89	1,1	1,21	1,331	1,048808848
90	1,15	1,32	1,52087	1,072380529
91	1,2	1,44	1,728	1,095445115
92	1,25	1,56	1,95312	1,118033989
93	1,3	1,69	2,197	1,140175425
94	1.35	1.82	2.46037	1.161895004

1. 写出下列函数的定义域，并指出它们的奇偶性：

（1）$y=x^4$；（2）$y=x^{\frac{1}{4}}$；（3）$y=x^{-3}$.

2. 画出函数 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 的图象，并指出其单调区间.

1. 比较下列各组数中两个值的大小：

（1）$5.23^{\frac{1}{2}}$，$5.24^{\frac{1}{2}}$；（2）0.26^{-1}，0.27^{-1}；

（3）$(-0.72)^3$，$(-0.75)^3$.

2. 求下列幂函数的定义域：

（1）$y=x^{\frac{2}{3}}$；（2）$y=x^{\frac{5}{6}}$.

（3）$y=x^{-\frac{4}{5}}$；（4）$y=x^{-\frac{3}{2}}$；

3. 画出函数 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 的图象，并指出其奇偶性、单调性.

4. 在同一坐标系内画出下列函数的图象，并加以比较：

（1）$y=x^{\frac{1}{2}}$，$y=x^{\frac{1}{3}}$；（2）$y=x^{-1}$，$y=x^{-2}$.

5. 汽车在隧道内行驶时，安全车距 d(m)正比于车速 v(km/h) 的平方与车身长(m)的积，且安全车距不得小于半个车身长. 假定车身长约为 4 m，车速为 60 km/h，安全车距为 1.44 个车身长，试写出车距 d 与车速 v 之间的函数关系式.

函数与方程

在 2.3.1 节中，我们利用对数求出了方程 $0.84^x=0.5$ 的近似解.

利用函数图象能求出 $0.84^x=0.5$ 的近似解吗?

利用什么方法可求出方程 $\lg x=3-x$ 的近似解?

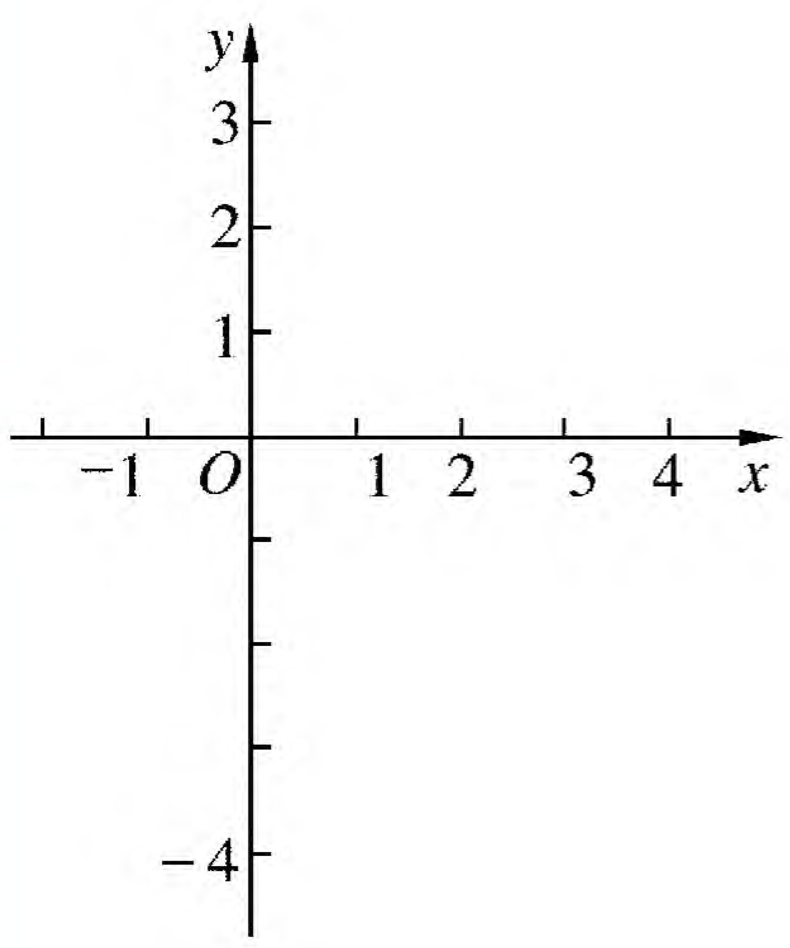
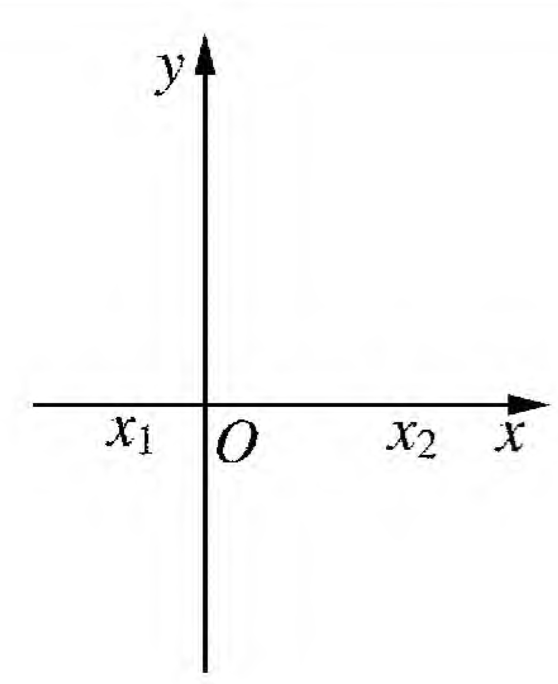
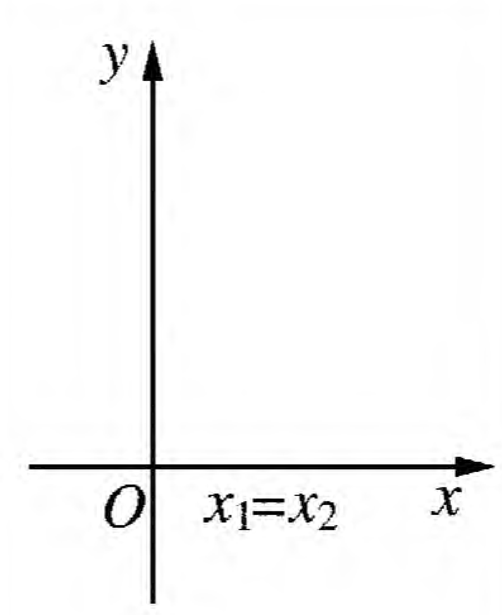
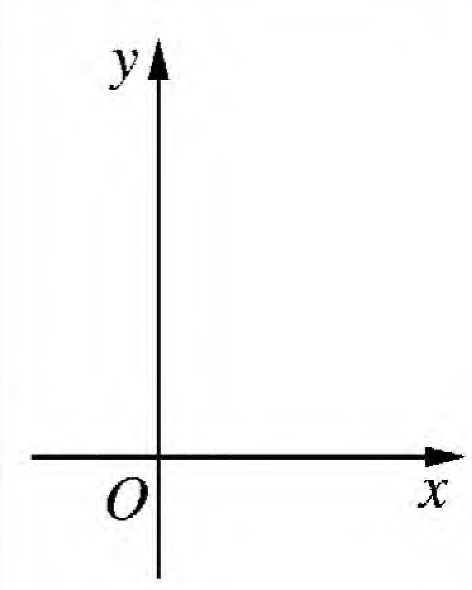


图 2-5-1 是二次函数 $y=x^2-2x-3$ 的图象. 观察图象，指出 x 取哪些值时，$y=0$.

一般地，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 的　　就是二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 的值为 0 时自变量 x 的值，也就是函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴交点的横坐标. 因此，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根也称为函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 的　　.

当 $a>0$ 时，可以得到方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根与函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象之间的关系，如表2-5-1 所示.

表 2-5-1

$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$	$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	方程无实数根
$y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$			

求证：一元二次方程 $2x^2+3x-7=0$ 有两个不相等的实数根.

因为

$$\begin{aligned}\Delta&=3^2-4\times 2\times(-7)\\&=65>0,\end{aligned}$$

所以方程 $2x^2+3x-7=0$ 有两个不相等的实数根.

设

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 7,$$

因为函数的图象是一条开口向上的抛物线，且

$$\begin{aligned} f(0) &= 2 \times 0^2 + 3 \times 0 - 7 \\ &= -7 < 0, \end{aligned}$$

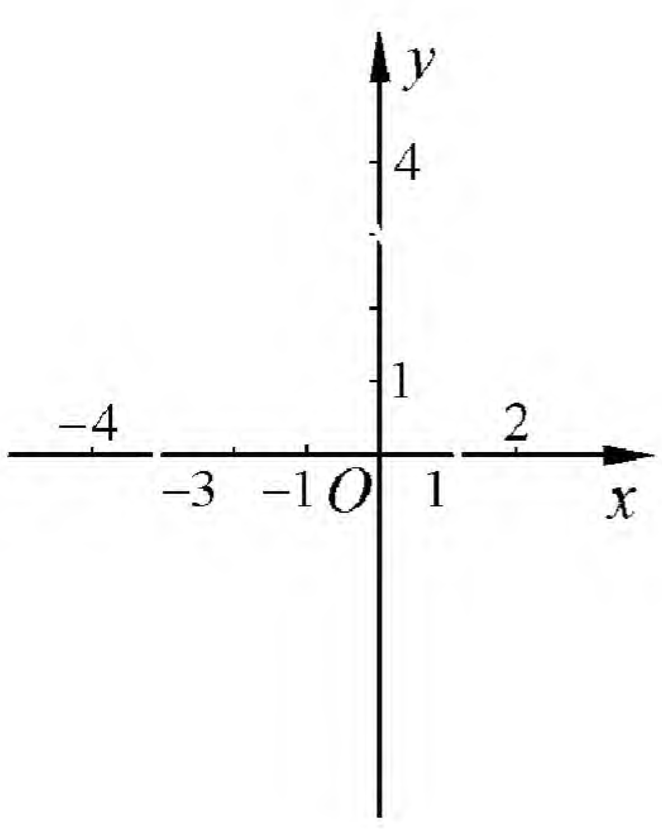
所以函数 $f(x)$的图象与 x 轴有两个不同的交点，即方程 $2x^2 + 3x - 7 = 0$ 有两个不相等的实数根.

图 2 - 5 - 2 是一个二次函数 $y = f(x)$ 的图象.

(1) 写出这个二次函数的零点；

(2) 写出这个二次函数的解析式；

(3) 试比较 $f(-4)f(-1)$，$f(0)f(2)$与 0 的大小关系.



(1) 由图象可以知道此函数的零点是 $x_1 = -3$，$x_2 = 1$.

(2) 根据(1)，可知这个二次函数的解析式为

$$f(x) = a(x+3)(x-1),$$

由 $f(-1) = 4$ 可知 $a = -1$，故

$$f(x) = -(x+3)(x-1),$$

即这个二次函数的解析式为

$$f(x) = -x^2 - 2x + 3.$$

(3) 因为

$$f(-4) = -5,\ f(-1) = 4,\ f(0) = 3,\ f(2) = -5,$$

所以

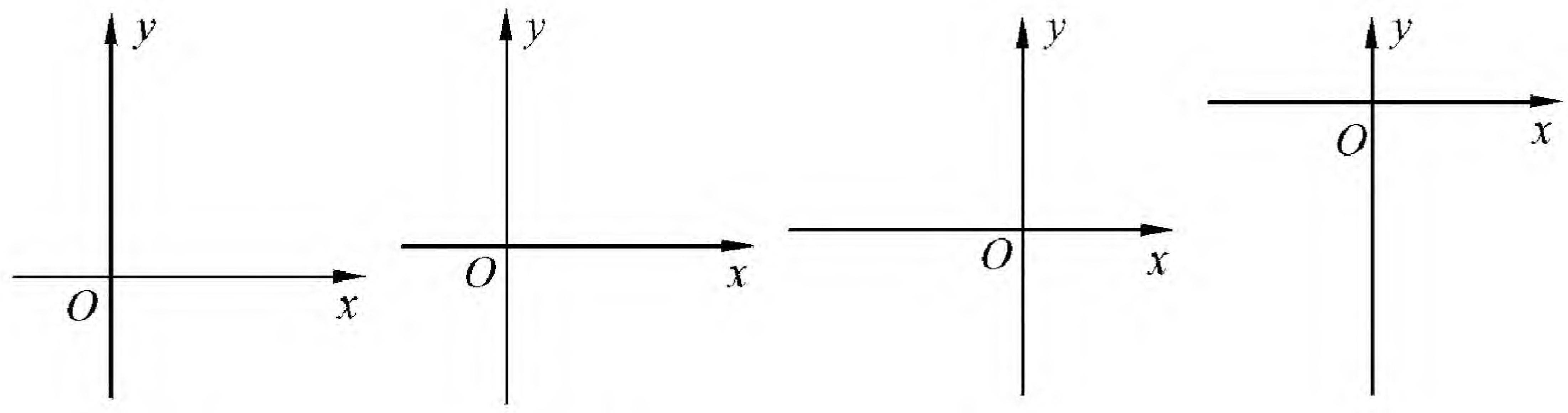
$$f(-4)f(-1) = -20 < 0,\ f(0)f(2) = -15 < 0.$$

若 x_0 是二次函数 $y = f(x)$ 的零点，且 $m < x_0 < n$，那么 $f(m)f(n) < 0$ 一定成立吗?

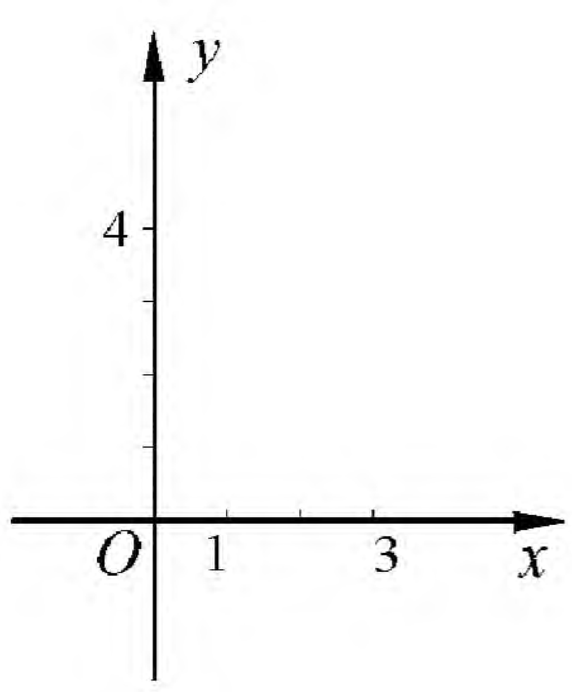
1. 画出函数 $y=x^2-x-2$ 的图象,并指出方程 $x^2-x-2=0$ 的根.

2. 求证:方程 $x^2+6x+4=0$ 有两个不相等的实数根.

3. 分别指出下列各图象对应的二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中系数 a, c 与 0 的大小关系.



(1)　　(2)　　(3)　　(4)



4. 函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示.

(1) 写出方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根;

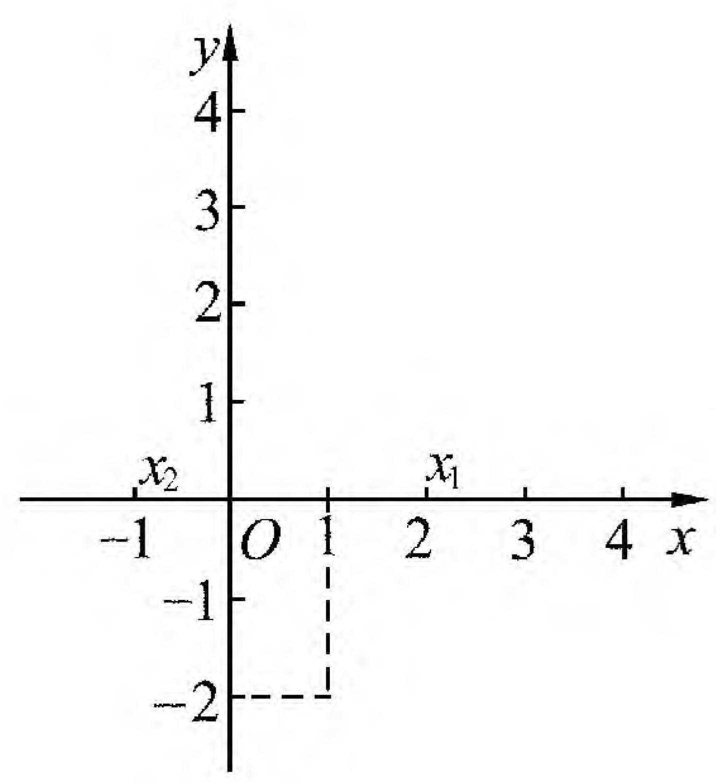
(2) 求 b, c 的值.

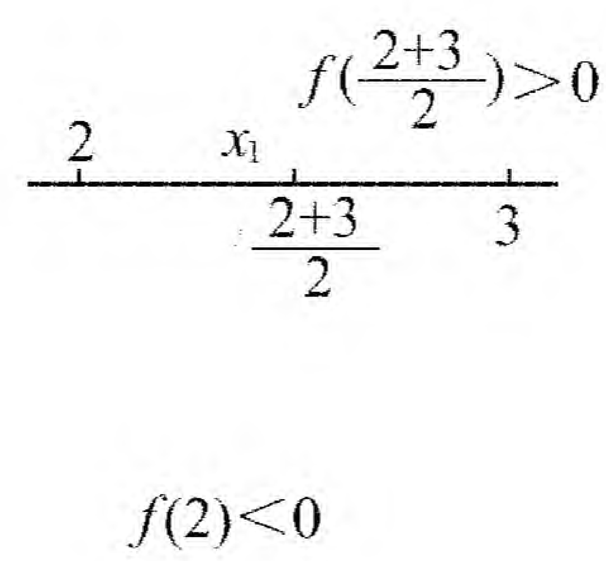
对于方程 $\lg x = 3 - x$，要求出这个方程的解是较为困难的. 但是，我们能否求出这个方程的近似解呢？

让我们先从熟悉的一元二次方程开始研究.

画出函数 $f(x) = x^2 - 2x - 1$ 的图象，如图 2-5-3 所示. 从图象上可以发现，方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的一个根 x_1 在区间 $(2, 3)$ 内，另一个根 x_2 在区间 $(-1, 0)$ 内.

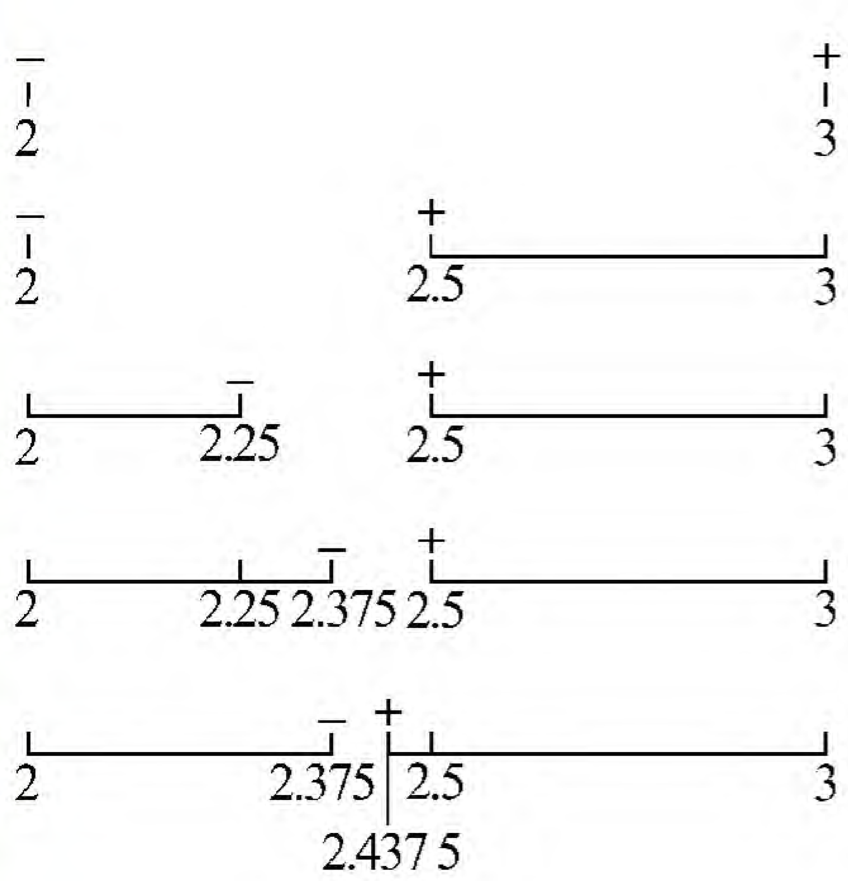
根据图象，我们发现 $f(2) = -1 < 0$，$f(3) = 2 > 0$，这表明此函数图象在区间 $(2, 3)$ 上穿过 x 轴一次，即方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(2, 3)$ 上有惟一解.





计算得 $f\left(\dfrac{2+3}{2}\right) = \dfrac{1}{4} > 0$，发现 $x_1 \in (2, 2.5)$（如图），这样可以进一步缩小 x_1 所在的区间.

你能把此方程的一个根 x_1 限制在更小的区间内吗？



利用计算器，求方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的一个近似解（精确到 0.1）.

设 $f(x) = x^2 - 2x - 1$，先画出函数图象的简图，如图 2-5-3.

因为

$$f(2) = -1 < 0,\ f(3) = 2 > 0,$$

所以在区间 $(2, 3)$ 内，方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 有一解，记为 x_1.

取 2 与 3 的平均数 2.5，因为

$$f(2.5) = 0.25 > 0,$$

所以

$$2 < x_1 < 2.5.$$

再取 2 与 2.5 的平均数 2.25，因为

$$f(2.25) = -0.4375 < 0,$$

所以

$$2.25 < x_1 < 2.5.$$

如此继续下去,得

$$f(2) < 0,\ f(3) > 0 \Rightarrow x_1 \in (2,\ 3),$$

$$f(2) < 0,\ f(2.5) > 0 \Rightarrow x_1 \in (2,\ 2.5),$$

$$f(2.25) < 0,\ f(2.5) > 0 \Rightarrow x_1 \in (2.25,\ 2.5),$$

$$f(2.375) < 0,\ f(2.5) > 0 \Rightarrow x_1 \in (2.375,\ 2.5),$$

$$f(2.375) < 0,\ f(2.4375) > 0 \Rightarrow x_1 \in (2.375,\ 2.4375).$$

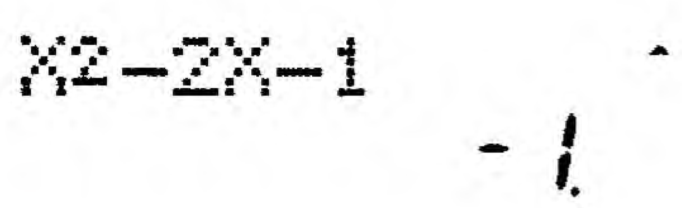
因为 2.375 与 2.437 5 精确到 0.1 的近似值都为 2.4,所以此方程的近似解为

$$x_1 \approx 2.4.$$

利用同样的方法,还可以求出方程的另一个近似解.

在上面的计算过程中,需反复计算 x^2-2x-1,以判断结果的正负,用下面的方法可以提高计算效率:

(1) 给变量 x 赋值,如 $x=2$,按键顺序是 2 SHIFT STO X;



(2) 计算 x^2-2x-1,按键顺序是 ALPHA X x^2 − 2 ALPHA X − 1 =;

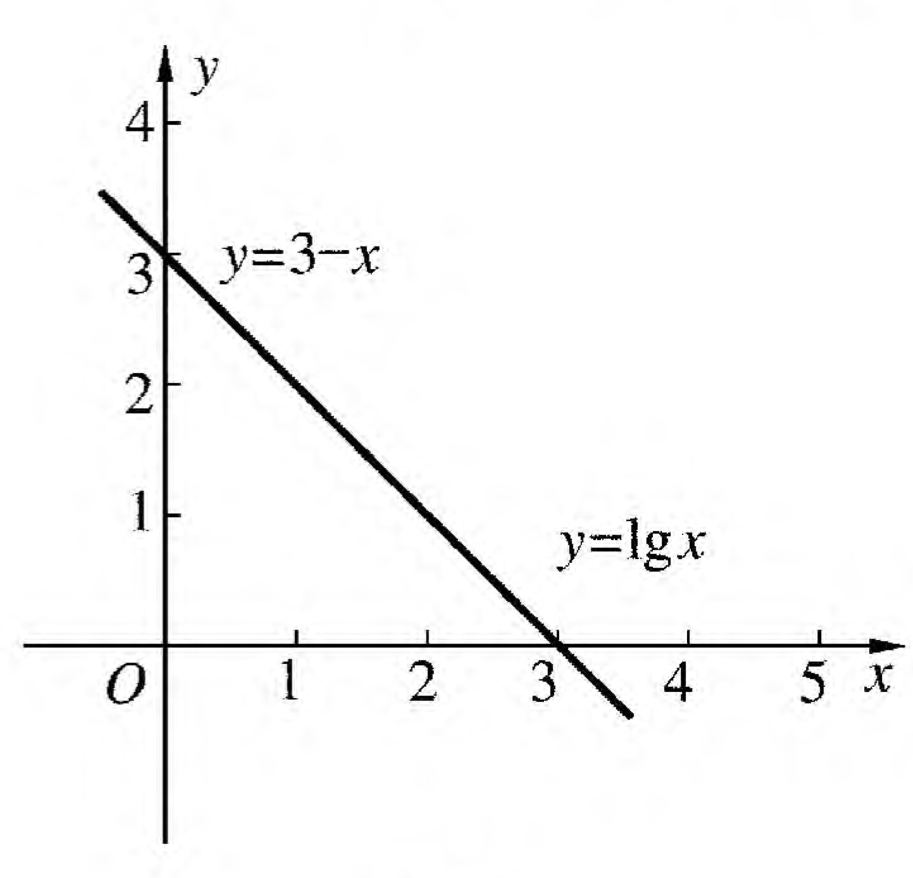
(3) 重复计算,如计算 $x=3$ 时 x^2-2x-1 的值,按(1)的步骤给 x 赋值 3,按 ▲,出现算式 x^2-2x-1,再按下 = 即可.

像上面这种求方程近似解的方法称为 (bisection method),它是求一元方程近似解的常用方法.

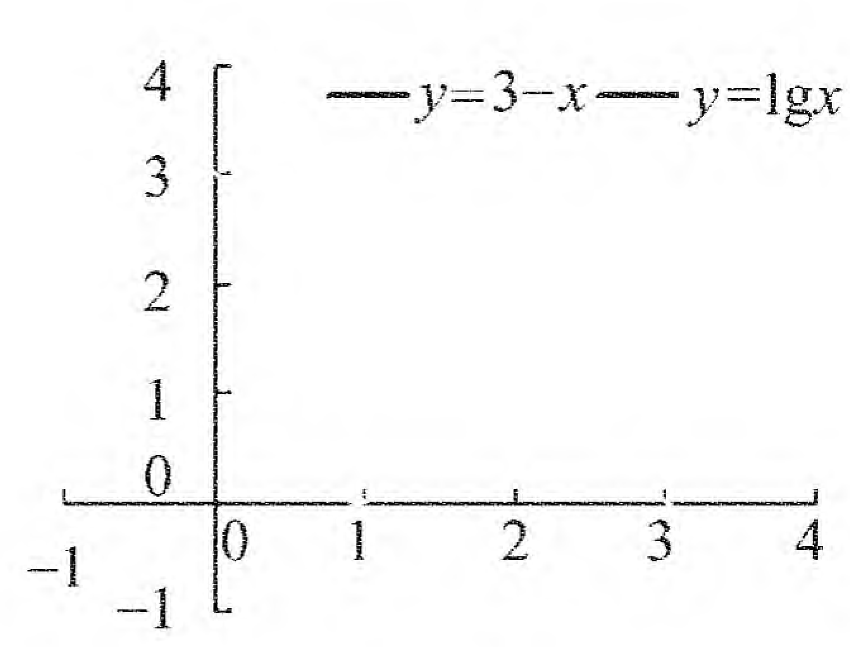
运用二分法的前提是要先判断某根所在的区间.

利用计算器,求方程 $\lg x = 3 - x$ 的近似解(精确到 0.1).

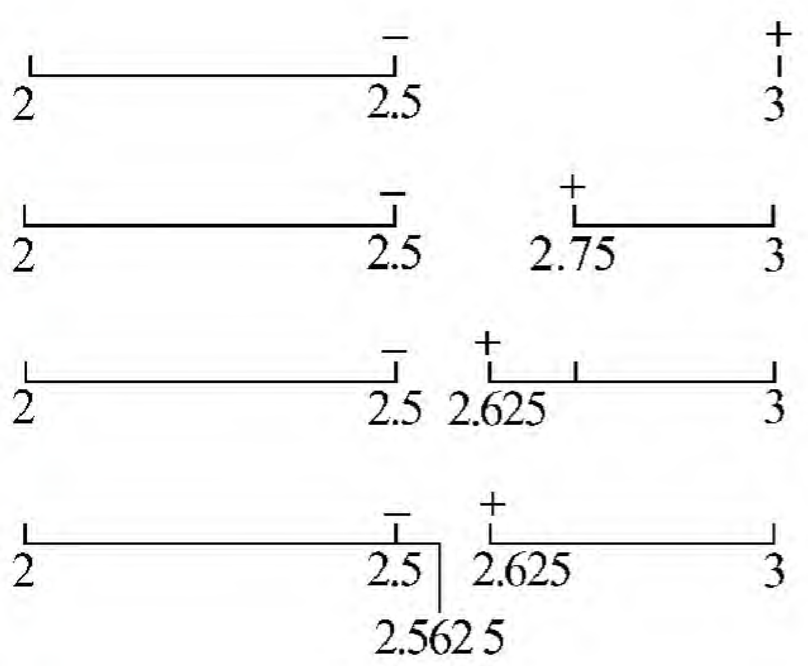
分别画函数 $y=\lg x$ 和 $y=3-x$ 的图象,如图 2-5-4(1)所示.在两个函数图象的交点处,函数值相等.因此,这个点的横坐标就是方程 $\lg x=3-x$ 的解.由函数 $y=\lg x$ 与 $y=3-x$ 的图象可以发现,方程 $\lg x = 3 - x$ 有惟一解,记为 x_1,并且这个解在区间(2, 3)内.



(1)



(2)



设 $f(x)=\lg x+x-3$，用计算器计算，得

$$f(2)<0,\ f(3)>0\Rightarrow x_1\in(2,\ 3),$$
$$f(2.5)<0,\ f(3)>0\Rightarrow x_1\in(2.5,\ 3),$$
$$f(2.5)<0,\ f(2.75)>0\Rightarrow x_1\in(2.5,\ 2.75),$$
$$f(2.5)<0,\ f(2.625)>0\Rightarrow x_1\in(2.5,\ 2.625),$$
$$f(2.5625)<0,\ f(2.625)>0\Rightarrow x_1\in(2.5625,\ 2.625).$$

因为 2.562 5 与 2.625 精确到 0.1 的近似值都为 2.6，所以原方程的近似解为

$$x_1\approx 2.6.$$

将原方程写成 $x=3-\lg x$，取 $x_1=2$，用计算器计算，则

$$3-\lg 2\approx 2.69897\rightarrow x_2,$$

再将 $x_2=2.69897$ 代入 $3-\lg x_2$ 得 x_3，如此循环计算 9 次后，你发现了什么？

用计算器反复计算 $3-\lg x$ 的方法是：

(1) 取初始值 $x=2$，按键顺序为 $\boxed{3}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\log}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$；

(2) 用前面的结果再代入计算，按键顺序为 $\boxed{3}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\log}$ $\boxed{\text{Ans}}$ $\boxed{=}$；

(3) 重复(2).

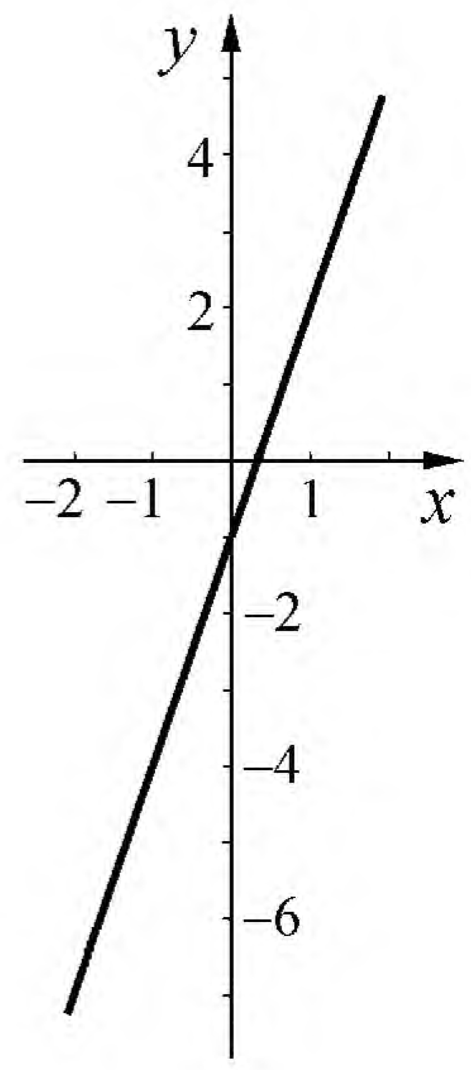
对于方程 $0.84^x=0.5$，我们画出函数 $y=0.84^x$ 与 $y=0.5$ 的图象，可以发现方程 $0.84^x=0.5$ 的解在区间 $(3,\ 5)$ 内，然后利用上述二分法可以求得方程 $0.84^x=0.5$ 的近似解为 $x\approx 4$. 这里给出了第 2.5 节开头的问题的答案.

1. 试判别方程 $x^3+3x-1=0$ 在区间 $(0,\ 1)$ 内是否有解.

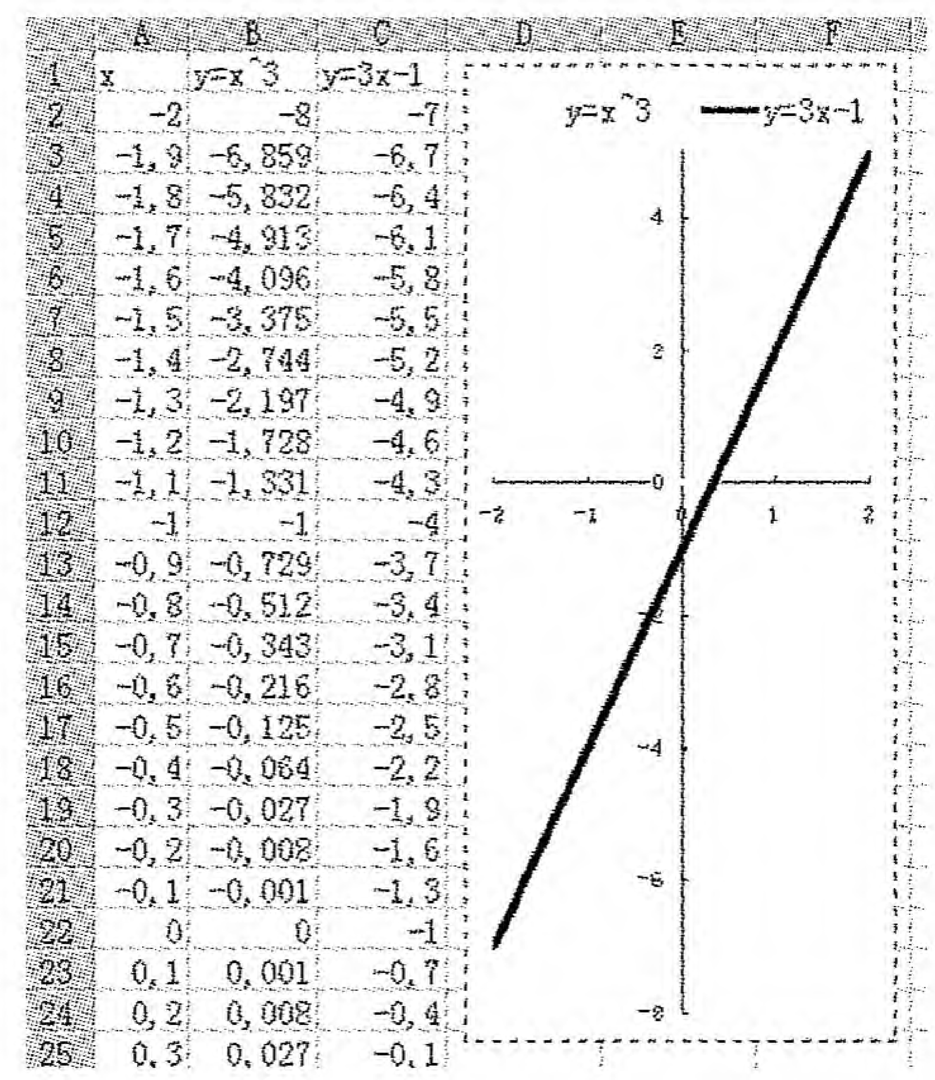
2. 用自己的语言叙述用二分法求方程近似解的基本步骤.

作出函数 $y = x^3$ 与 $y = 3x - 1$ 的图象，并写出方程 $x^3 = 3x - 1$ 的近似解(精确到 0.1).

函数 $y = x^3$ 与 $y = 3x - 1$ 的图象如图 2－5－5 所示. 在两个函数图象的交点处，函数值相等. 因此，这三个交点的横坐标就是方程 $x^3 = 3x - 1$ 的解.



(1)



	A	B	C
1	x	y=x^3	y=3x-1
2	-2	-8	-7
3	-1, 9	-6, 859	-6, 7
4	-1, 8	-5, 832	-6, 4
5	-1, 7	-4, 913	-6, 1
6	-1, 6	-4, 096	-5, 8
7	-1, 5	-3, 375	-5, 5
8	-1, 4	-2, 744	-5, 2
9	-1, 3	-2, 197	-4, 9
10	-1, 2	-1, 728	-4, 6
11	-1, 1	-1, 331	-4, 3
12	-1	-1	-4
13	-0, 9	-0, 729	-3, 7
14	-0, 8	-0, 512	-3, 4
15	-0, 7	-0, 343	-3, 1
16	-0, 6	-0, 216	-2, 8
17	-0, 5	-0, 125	-2, 5
18	-0, 4	-0, 064	-2, 2
19	-0, 3	-0, 027	-1, 9
20	-0, 2	-0, 008	-1, 6
21	-0, 1	-0, 001	-1, 3
22	0	0	-1
23	0, 1	0, 001	-0, 7
24	0, 2	0, 008	-0, 4
25	0, 3	0, 027	-0, 1

(2)

由图象可以知道，方程 $x^3 = 3x - 1$ 的解分别在区间 $(-2, -1)$，$(0, 1)$ 和 $(1, 2)$ 内，那么，对于区间 $(-2, -1)$，$(0, 1)$ 和 $(1, 2)$ 分别利用二分法就可以求得它精确到 0.1 的近似解为

$$x_1 \approx -1.8,$$

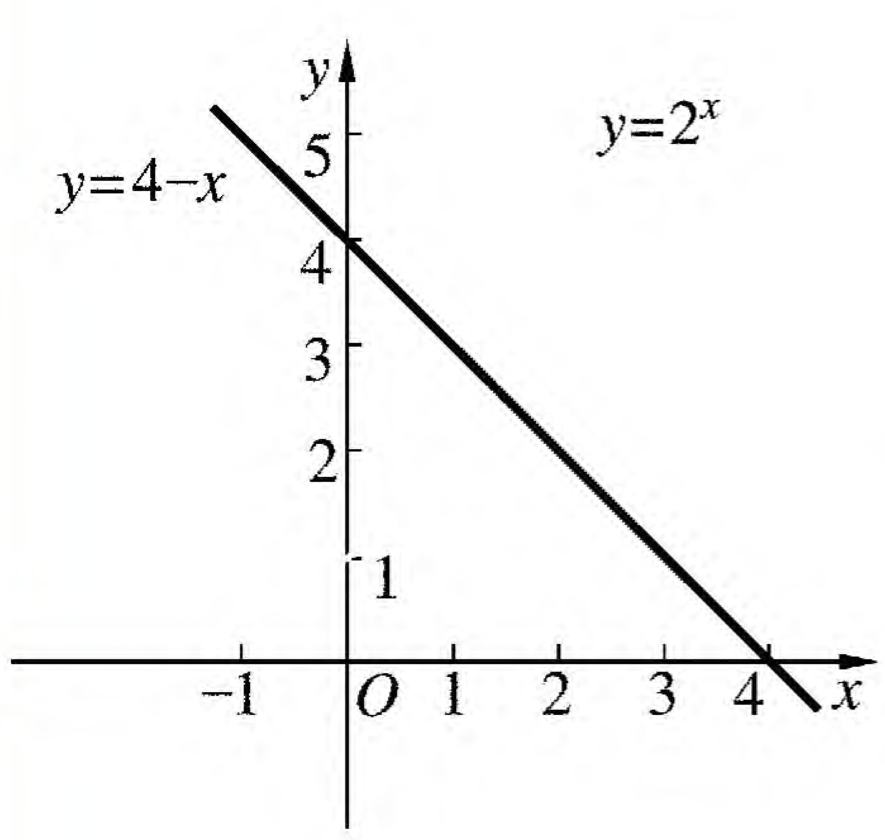
$$x_2 \approx 0.4,$$

$$x_3 \approx 1.5.$$

求方程 $2^x + x = 4$ 的近似解(精确到0.1).

方程 $2^x + x = 4$ 可以化为 $2^x = 4 - x$.

分别画函数 $y = 2^x$ 与 $y = 4 - x$ 的图象，如图 2－5－6 所示.

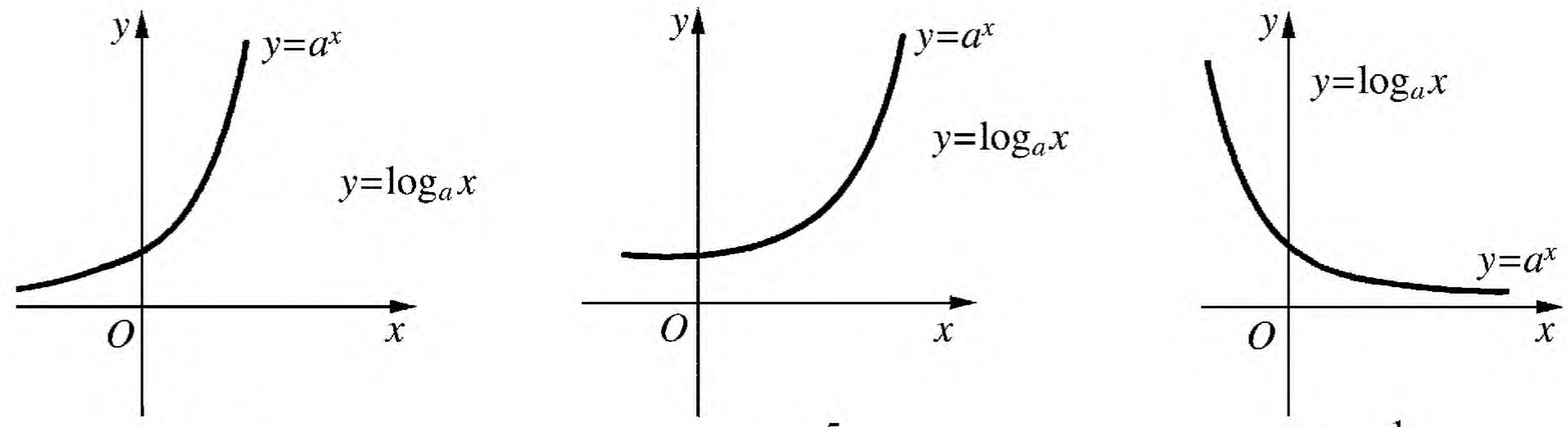


由图象可以知道，方程 $2^x + x = 4$ 的解在区间 $(1, 2)$ 内，那么对于区间 $(1, 2)$，利用二分法就可以求得它的近似解为

$$x \approx 1.4.$$

分别就 $a = 2$，$a = \frac{5}{4}$ 和 $a = \frac{1}{2}$ 画出函数 $y = a^x$，$y = \log_a x$ 的图象，并求方程 $a^x = \log_a x$ 的解的个数.

利用 Excel、图形计算器或其他画图软件，可以画出函数的图象，如图 2－5－7 所示.



$a=2$ (1)　　$a=\frac{5}{4}$ (2)　　$a=\frac{1}{2}$ (3)

根据图象,我们可以知道,当 $a=2$, $a=\frac{5}{4}$ 和 $a=\frac{1}{2}$ 时,方程 $a^x=\log_a x$ 解的个数分别是 0, 2, 1.

当 $0<a<1$ 时,方程 $a^x=\log_a x$ 只有一个解吗?

1. 用两种方法解方程 $2x^2=3x-1$.

2. 利用计算器,求方程 $x^3=2x+1$ 的近似解(精确到 0.1).

1. 求证:方程 $x^2+x+1=0$ 没有实数根.

2. 已知函数 $y=-x^2+2x+k$ 的图象与 y 轴交于点(0, 3).

(1) 求 k 的值;

(2) 求函数的最大值以及取得最大值时 x 的值.

3. 求证:方程 $5x^2-7x-1=0$ 的根一个在区间$(-1, 0)$内,另一个在区间$(1, 2)$内.

4. 利用计算器求方程 $x^2-2x-2=0$ 的近似解(精确到 0.1).

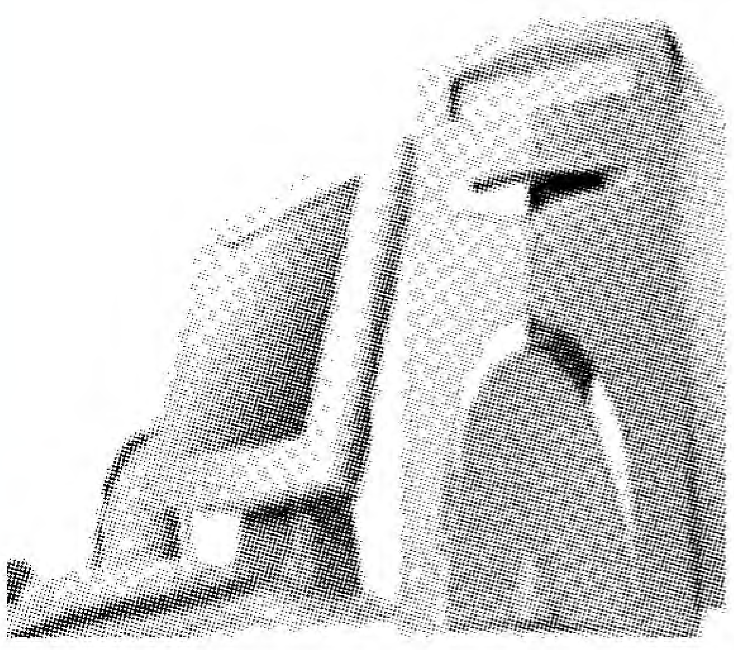
5. 用多种方法解方程 $x^2=3x+10$.

6. 利用计算器,求下列方程的近似解(精确到 0.1).

(1) $\lg 2x=-x+1$;　　(2) $3^x=x+4$.

函数模型及其应用

函数是描述客观世界变化规律的基本数学模型，是研究变量之间依赖关系的有效工具. 利用函数模型可以处理生产、生活中许多实际问题.



某计算机集团公司生产某种型号计算机的固定成本为 200 万元，生产每台计算机的可变成本为 3 000 元，每台计算机的售价为 5 000 元. 分别写出总成本 C(万元)、单位成本 P(万元)、销售收入 R(万元)以及利润 L(万元)关于总产量 x(台)的函数关系式.

总成本与总产量的关系为

$$C=200+0.3x, x\in \mathbf{N}^*.$$

单位成本与总产量的关系为

$$P=\frac{200}{x}+0.3, x\in \mathbf{N}^*.$$

销售收入与总产量的关系为

$$R=0.5x, x\in \mathbf{N}^*.$$

利润与总产量的关系为

$$L=R-C=0.2x-200, x\in \mathbf{N}^*.$$

物体在常温下的温度变化可以用牛顿冷却规律来描述：设物体的初始温度是 T_0，经过一定时间 t 后的温度是 T，则 $T-T_a=(T_0-T_a)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{h}}$，其中 T_a 表示环境温度，h 称为半衰期.

现有一杯用 88℃热水冲的速溶咖啡，放在 24℃的房间中，如果咖啡降温到 40℃需要 20 min，那么降温到 35℃时，需要多长时间？

由题意知

$$40-24=(88-24)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{20}{h}},$$

即

$$\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{20}{h}}.$$

解之，得 $h=10$，故

$$T-24=(88-24)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}}.$$

当 $T=35$ 时，代入上式，得

$$35-24=(88-24)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}},$$

即

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}}=\frac{11}{64}.$$

两边取对数，用计算器求得 $t\approx 25$.

因此，约需要 25 min，可降温到 35℃.

在经济学中，函数 $f(x)$的边际函数 $Mf(x)$定义为 $Mf(x)=f(x+1)-f(x)$. 某公司每月最多生产 100 台报警系统装置，生产 x 台 ($x\in\mathbf{N}^*$) 的收入函数为 $R(x)=3\,000x-20x^2$ (单位：元)，其成本函数为 $C(x)=500x+4\,000$ (单位：元)，利润是收入与成本之差.

(1) 求利润函数 $P(x)$及边际利润函数 $MP(x)$；

(2) 利润函数 $P(x)$与边际利润函数 $MP(x)$是否具有相同的最大值？

由题意知，$x\in[1,\ 100]$，且 $x\in\mathbf{N}^*$.

(1)
$$\begin{aligned}P(x)&=R(x)-C(x)\\&=3\,000x-20x^2-(500x+4\,000)\\&=-20x^2+2\,500x-4\,000,\\MP(x)&=P(x+1)-P(x)\\&=-20(x+1)^2+2\,500(x+1)-4\,000-\\&\quad[-20x^2+2\,500x-4\,000]\\&=2\,480-40x.\end{aligned}$$

(2) $P(x)=-20\left(x-\frac{125}{2}\right)^2+74\,125$，当 $x=62$ 或 $x=63$ 时，$P(x)$ 的最大值为 74 120(元).

因为 $MP(x)=2\,480-40x$ 是减函数，所以当 $x=1$ 时，$MP(x)$ 的最大值为 2 440(元).

因此，利润函数 $P(x)$与边际利润函数 $MP(x)$不具有相同的最大值.

例 3 中边际利润函数 $MP(x)$当 $x=1$ 时取最大值，说明生产第二台与生产第一台的总利润差最大，即第二台报警系统利润最大. $MP(x)=2\,480-40x$ 是减函数，说明随着产量的增加，每台利润与前一台利润相比在减少.

通过上述三个例子，我们可以看出，解决实际问题通常按

$\boxed{\text{实际问题}} \rightarrow \boxed{\text{建立数学模型}} \rightarrow \boxed{\text{得到数学结果}} \rightarrow \boxed{\text{解决实际问题}}$

的程序进行，其中建立数学模型是关键.

1. 某地高山上温度从山脚起每升高 100 m 降低 0.7℃，已知山顶的温度是 14.1℃，山脚的温度是 26℃. 问：此山有多高？

2. 某车站有快、慢两种车，始发站距终点站 7.2 km，慢车到终点站需16 min，快车比慢车晚发车 3 min，且行驶 10 min 后到达终点站. 试分别写出两车所行路程关于慢车行驶时间的函数关系式. 两车在何时相遇？相遇时距始发站多远？

3. 经市场调查，某商品在过去 100 天内的销售量和价格均为时间 t(d)的函数，且销售量近似地满足 $g(t)=-\frac{1}{3}t+\frac{109}{3}$ $(1\leqslant t\leqslant 100, t\in \mathbf{N})$. 前 40 天价格为 $f(t)=\frac{1}{4}t+22$ $(1\leqslant t\leqslant 40, t\in \mathbf{N})$，后 60 天价格为 $f(t)=-\frac{t}{2}+52$ $(41\leqslant t\leqslant 100,\ t\in \mathbf{N})$. 试写出该种商品的日销售额 S 与时间 t 的函数关系.

4. 某店从水果批发市场购得椰子两筐，连同运费总共花了 300 元，回来后发现有 12 个是坏的，不能将它们出售，余下的椰子按高出成本价 1 元/个售出，售完后共赚得 78 元. 问：这两筐椰子原来共有多少个？

数 据 拟 合

现实世界中的事物都是相互联系、相互影响的，反映事物变化的变量之间就存在着一定的关系.这些关系的发现，通常是通过试验或实验测定得到一批数据，再经过分析处理得到的.

数据拟合就是研究变量之间这种关系，并给出近似的数学表达式的一种方法.根据拟合模型，我们还可以对某变量进行预测或控制.解决数据拟合问题首先应作出数据的散点图，然后通过观察散点趋势选用相应的模型进行拟合.为使散点图更清晰，可将数据适当简化.

下面，我们运用数据拟合解决第 2 章开头的第一个问题.

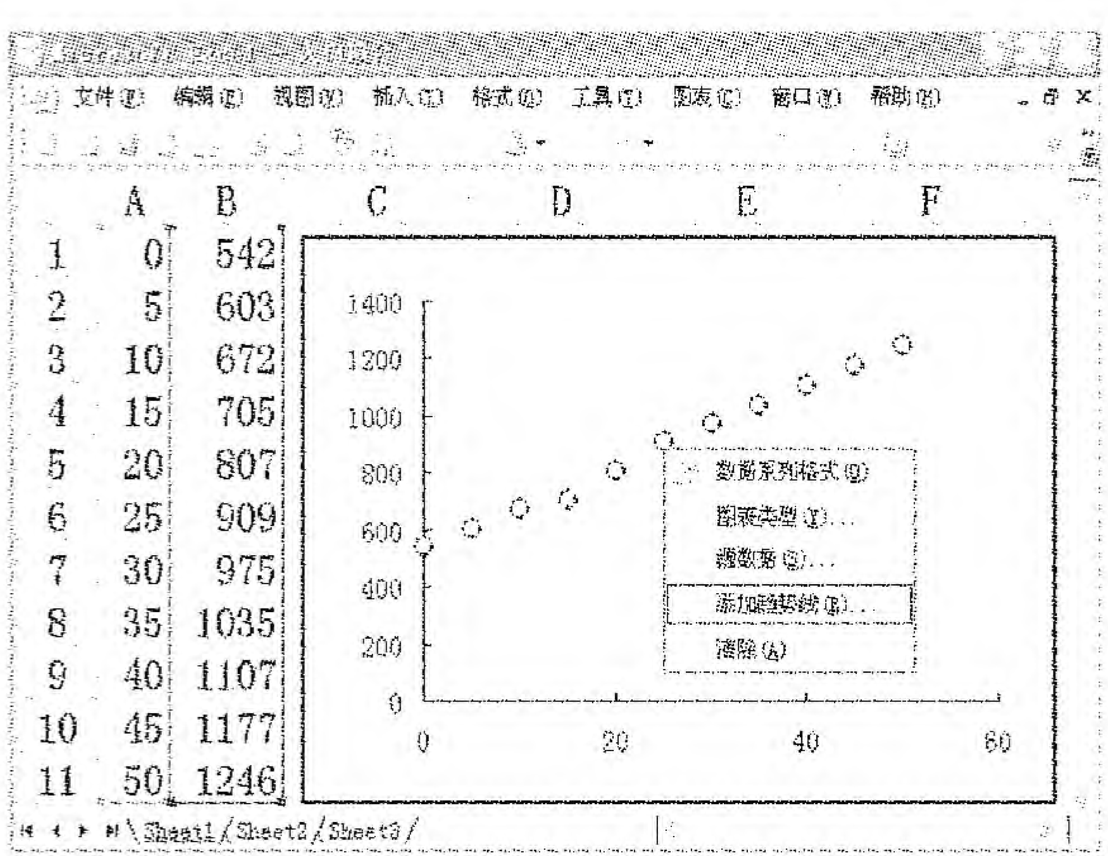
估计人口数量变化趋势是我们制定一系列相关政策的依据.从人口统计年鉴中可查得我国从 1949 年至 1999 年人口数据资料如表 2-6-1 所示，试估计我国 2004 年的人口数.

表 2-6-1　1949～1999 年我国人口数据表

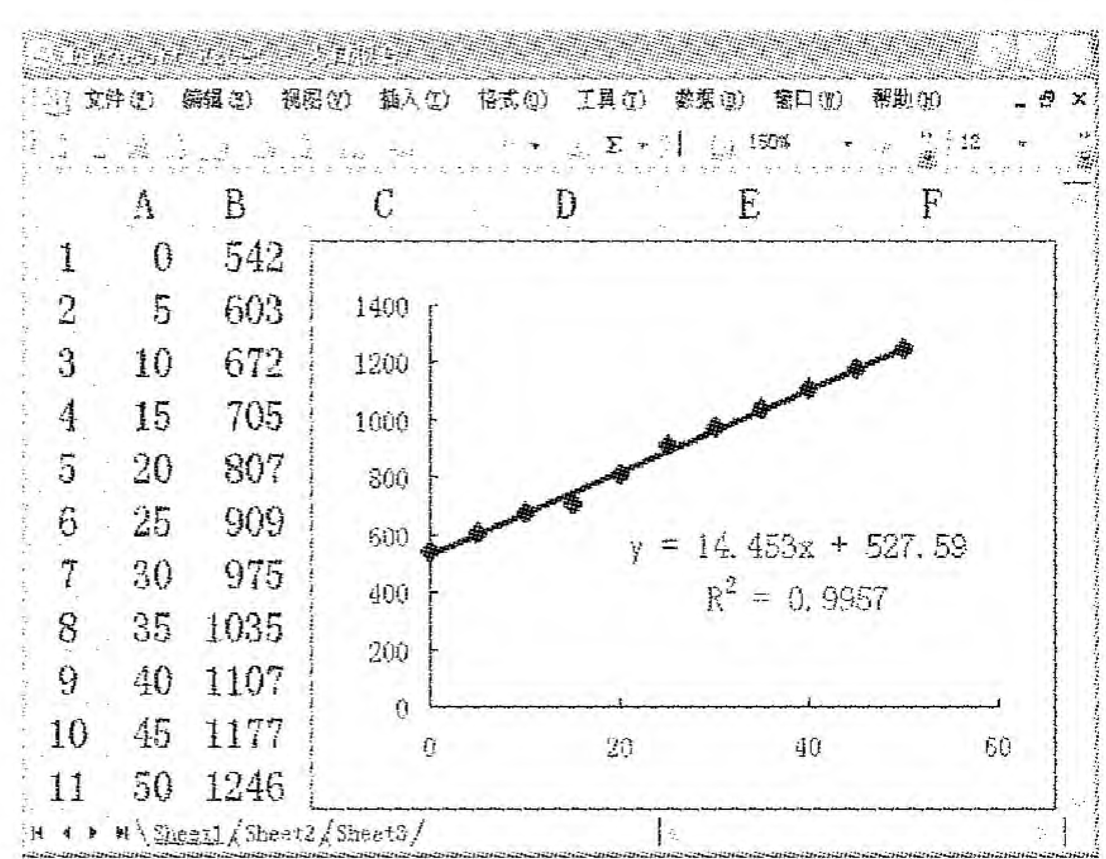
年　份	1949	1954	1959	1964	1969	1974	1979	1984	1989	1994	1999
人口数/百万	542	603	672	705	807	909	975	1 035	1 107	1 177	1 246

为简化数据，先将年份减去 1 949，再将数据输入 Excel 工作表进行处理.由图 2-6-1 知拟合模型为

$$y = 14.453x + 527.59.$$



(1)



(2)

当 $x = 55$（即 2004 年）时，$y = 1\,322.505 \approx 13.23$(亿).

上面的直线方程也称为回归直线，显示的 R^2 值越接近 1，其拟合效果越好.在输入年份时，可用“趋势填充”快速输入.

“添加趋势线”是 Excel 进行数据拟合的一个有力工具，它提供了线性、对数、多项式、乘幂、指数、移动平均等六种数学模型，可供择优

选用，为我们分析整理各种数据、建立合理的数学模型，从而作出科学的预测创造了有利的条件.

需要指出的是，其中 R^2 是指回归平方和占总平方和的百分比，具体可参阅Excel帮助文件中“趋势线计算方程”的相关说明.

用计算器求回归直线的方法：

(1) 按 MODE 键，选择“回归计算”模式(REG)；

(2) 进入 REG 模式后，按 1 选择回归种类“线性(Lin)”；

(3) 输入数据，按键 0 , 542 DT，即可输入一组数据(0, 542)，将所有数据仿此全部输入；

(4) 计算回归直线方程 $y=a+bx$ 中的系数：

按 SHIFT S-VAR ► ► 1 = 得回归系数

$$a=527.590\,909\,1,$$

按 SHIFT S-VAR ► ► 2 = 得回归系数

$$b=14.452\,727\,27,$$

按 SHIFT S-VAR ► ► 3 = 得相关系数

$$r=0.997\,848\,916;$$

(5) 预测，即计算当 $x=55$ 时的 y 值，可直接按键 55 SHIFT S-VAR ► ► ► 2 = 得

$$y=1\,322.490\,909\approx1\,322.5.$$

表 2-6-2 是某种车的车速与刹车后的停车距离，试建立两者之间的关系，并求当车速为 120 km/h 时的刹车距离.

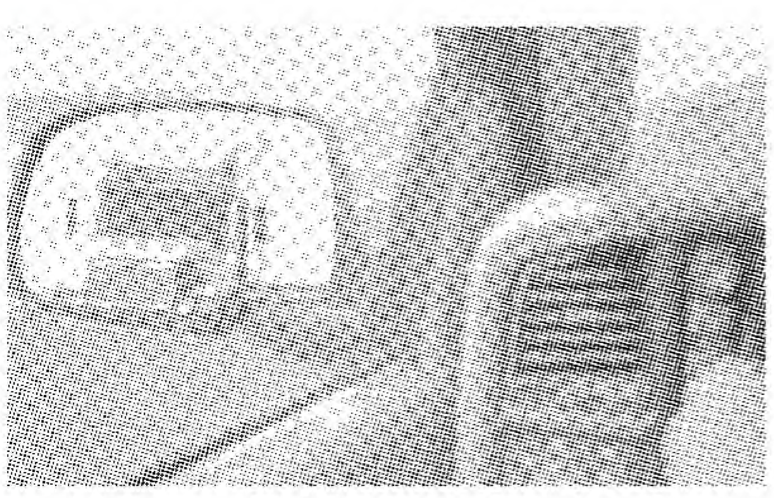


表 2-6-2

车速/(km/h)	10	15	30	40	50	60	70	80	90	100
停车距离/m	4	7	12	18	25	34	43	54	66	80

在 Excel 工作表中输入数据，作出散点图，发现散点呈递增趋势，分别添加指数、乘幂、二次多项式等三种趋势线，如图 2-6-2. 根据显示的 R^2 值，选择最大的一个. 因此采用二次函数模型，即车速 x 与停车距离 y 之间的关系为

$$y=0.006\,4x^2+0.125\,6x+2.737\,4.$$

当 $x=120$ 时，$y\approx110$(m).

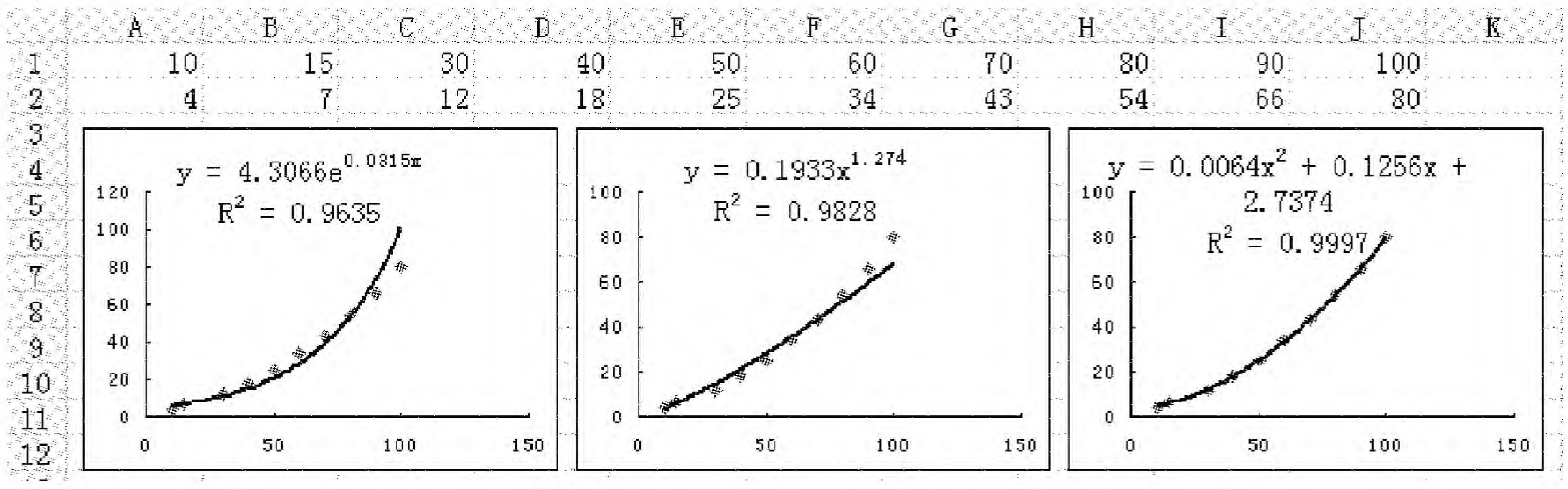


表 2－6－3 给出了九大行星离太阳的距离和它们运行的周期，试建立这两组数据之间的关系.

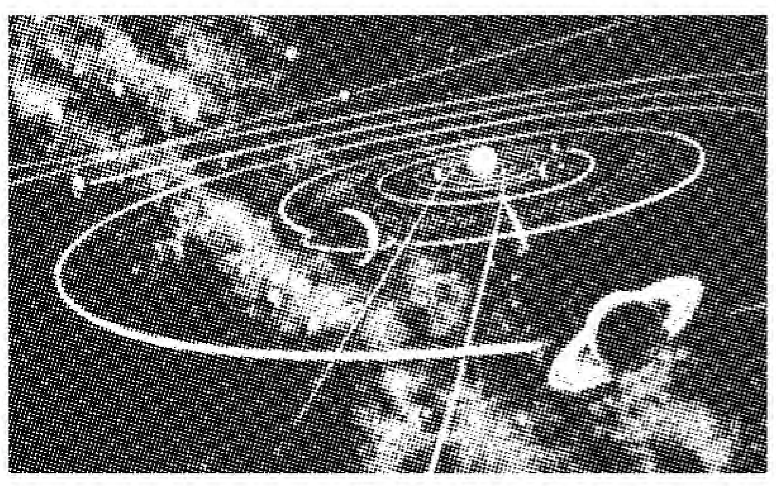
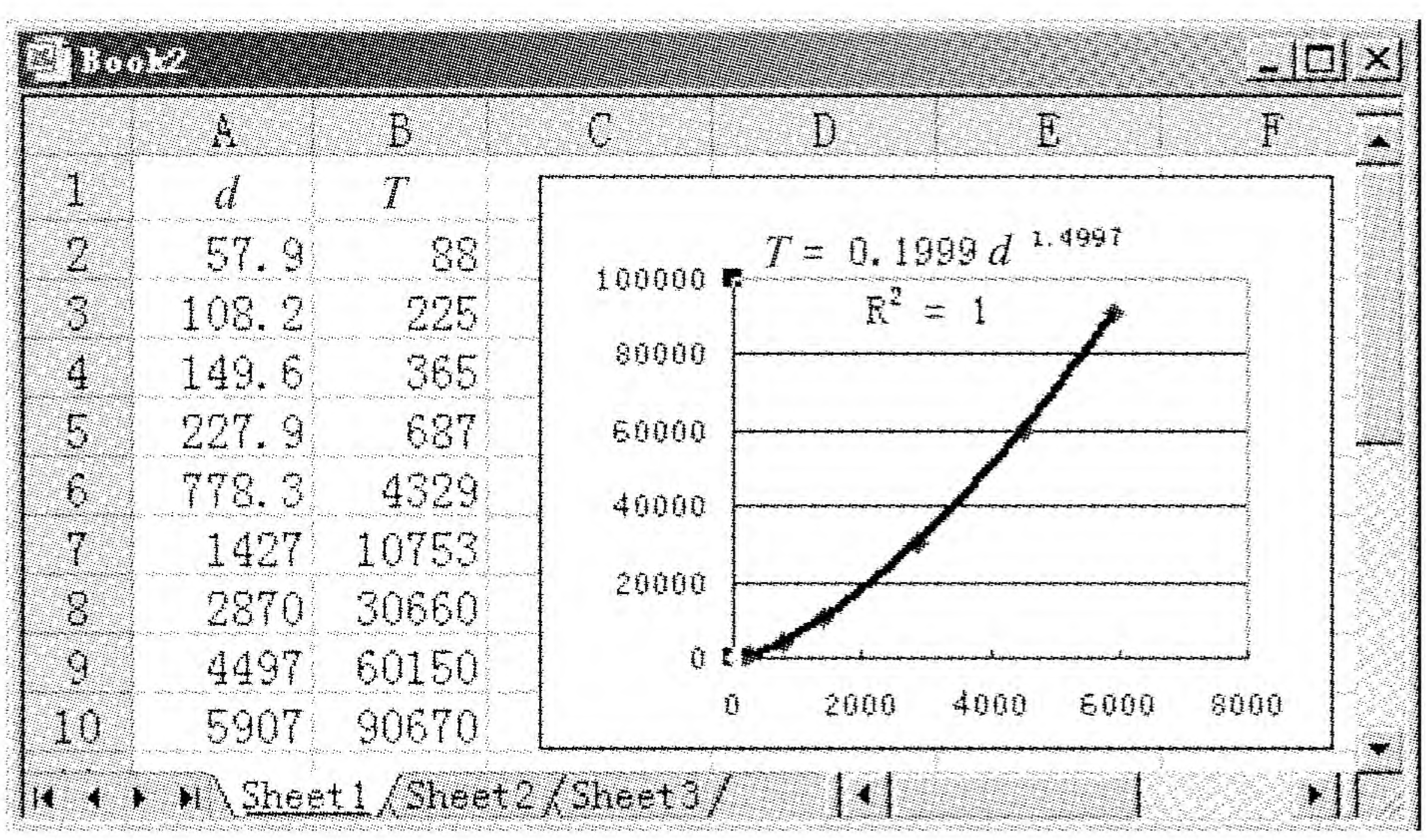


表 2－6－3

	水星	金星	地球	火星	木星	土星	天王星	海王星	冥王星
距离/10^6 km	57.9	108.2	149.6	227.9	778.3	1 427	2 870	4 497	5 907
周期/d	88	225	365	687	4 329	10 753	30 660	60 150	90 670

在 Excel 工作表中输入上述数据，作出散点图后观察散点趋势，尝试用指数、乘幂和二次多项式拟合，发现乘幂的 R^2 值为 1，故采用幂函数模型效果最好. 由图 2－6－3 可知，运行周期 T 与距离 d 满足关系



$$
\begin{aligned}
T &= 10^{-0.699\,14} d^{1.499\,738} \\
&\approx 0.199\,9 d^{1.499\,7} \\
&\approx 0.2 d^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}
$$

这就是开普勒第三定律的数学表达式，它揭示了“公转时间的平方与平均距离的立方成正比”这一天体运动规律.

利用数据拟合解决问题，首先应作出数据的散点图，然后通过观察散点趋势选用适当的模型进行拟合.

1. 我国南方某种植物生长时间与高度如下表所示，试研究它们之间的关系.

生长时间/a	2	4	5	8	9
高度/m	2.01	2.98	3.50	5.02	5.47

2. 1996年统计资料显示，我国能源生产自1985年以来发展迅速. 下表是我国能源生产总量(折合亿吨标准煤)的几个统计数据：

年　份	1985	1990	1995
产量/10^8 t	8.6	10.4	12.9

当时有关专家预测：到2000年我国能源生产总量折合成标准煤将超过16.1亿吨. 试给出一个简单模型，说明有关专家的预测是否合理，并上网检索2000年我国能源生产总量，以验证你的结论.

1. 若函数 $y=mx^2-6x+2$ 的图象与 x 轴只有一个公共点，求 m 的值.
2. 若方程 $4(x^2-3x)+k-3=0$ 没有实数根，求 k 的取值范围.
3. 销售甲、乙两种商品所得利润分别是 P(万元)和Q(万元)，它们与投入资金 t(万元)的关系有经验公式 $P=\frac{1}{5}t$, $Q=\frac{3}{5}\sqrt{t}$. 今将3万元资金投入经营甲、乙两种商品，其中对甲种商品投资x(万元)，试建立总利润 y(万元)关于 x 的函数表达式.
4. 某工厂第一季度某产品月生产量分别为1万件、1.2万件、1.3万件. 为了估测以后每个月的产量，以这三个月的产量为依据，用一个函数模拟该产品的月产量 y 与月份 x 的关系. 模拟函数可以选用二次函数或函数 $y=ab^x+c$ (其中 a, b, c 为常数). 已知4月份的产量为1.36万件，问：用以上哪个函数作为模拟函数较好？说明理由.

5. 在六块并排、形状大小相同的试验田上，进行施化肥量对水稻产量影响的试验，得到如下所示的一组数据(单位：kg)：

施化肥量 x	15	20	25	30	35	45
水稻产量 y	330	345	365	405	445	455

(1) 根据上表中的数据绘制出散点图；
(2) 施肥量 x 与水稻产量 y 之间的关系能否用线性函数来表示?
(3) 估计施肥量为40 kg时水稻的产量.

6. 某公司今年上半年的月利润如下表所示，假定短期内利润增长基本符合对数规律，请你预测今年7，8两个月的月利润.

月　份	1	2	3	4	5	6
利润/万元	29.9	44.2	54.1	61.7	68.3	73.4

7. 在稻苗上，稻蓟马(一种害虫)的“有卵株率”和“百株卵量”如下表：

有卵株率 x/%	1	3	5	10	21	23	40	49	53	59
百株卵量 y/粒	5	7	21	28	100	110	239	306	340	360

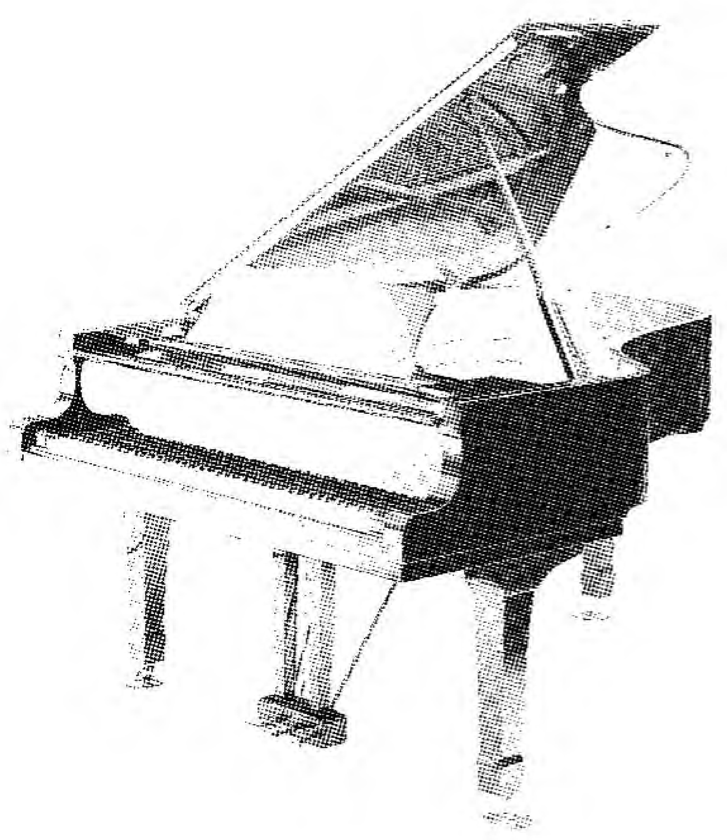
(1) 在直角坐标系中，画出所对应的点；

(2) 若所用的拟合模型为函数 $y=3.246\,2x^{1.144}$，试预测“有卵株率”为 30% 时的“百株卵量”；

(3) 若所用的拟合模型为一次函数，试写出函数表达式，并预测“有卵株率”为 15%时的“百株卵量”.

8. (写作题)到学校附近的农村、工厂、商店、机关作调查，了解函数模型在生产、生活中的应用，收集一些生活中的函数模型(指数函数、对数函数、幂函数、分段函数等)实例，并作出分析，写成调查报告.

探究案例　　钢琴与指数曲线

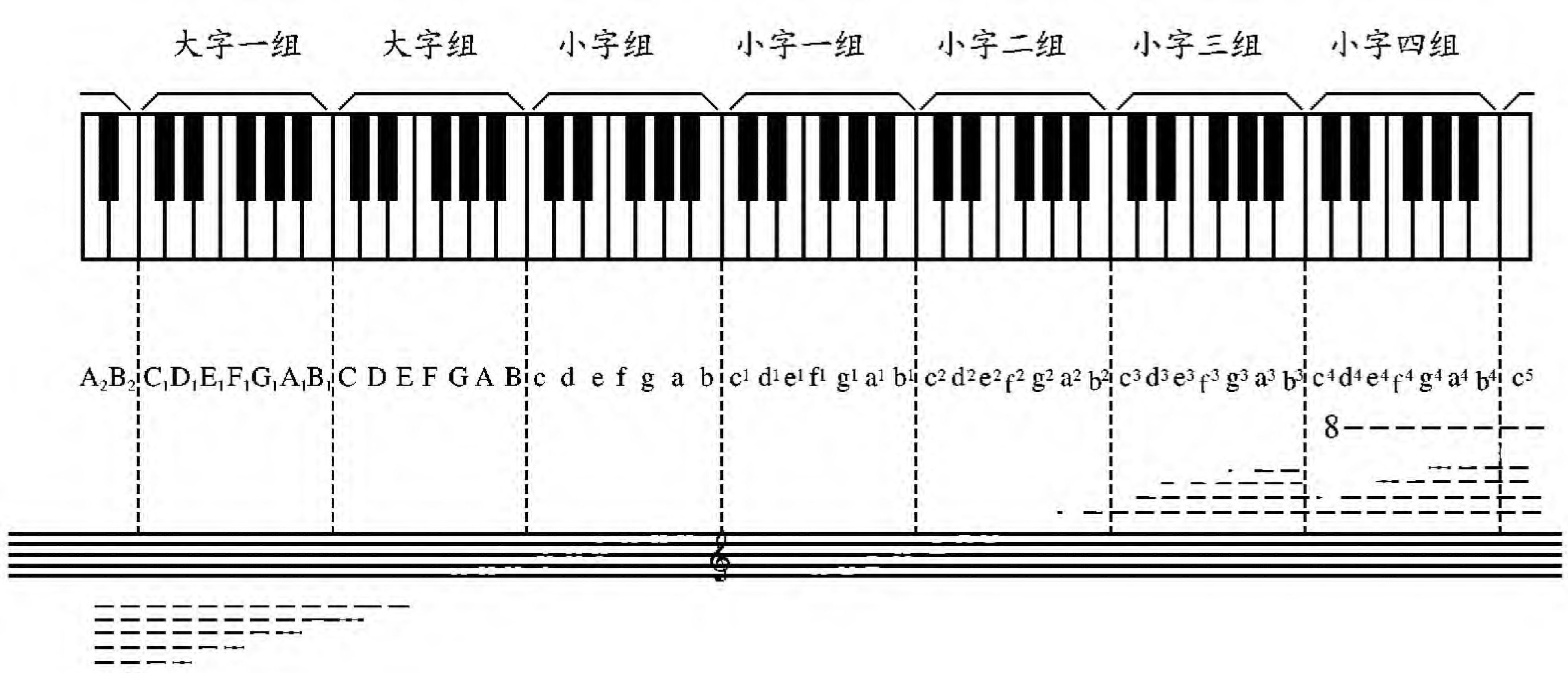


钢琴是一种用琴槌击弦而振动发声的键盘乐器，最早的钢琴是意大利佛罗伦萨梅迪奇宫廷的乐师克里斯托弗里（1655～1731）于1711年制造的，钢琴的意大利文为 Piano forte，由 piano（弱）和 forte（强）两字组合而成. 钢琴在音量上可以奏出极大的层次变化，它的音域极为宽广，最多可以有7个八度并包括所有的半音. 它可演奏和弦与复调音乐，手法极为丰富. 因此，钢琴有“乐器之王”的称号.

但是，你曾留心过三角钢琴的轮廓有一段奇妙的“曲线”吗？三角钢琴的轮廓上部为什么要制成这样形状的曲线？

为了解释这一现象，我们应学会观察、调查和研究.

首先，从左往右逐个试弹所有琴键（包括所有白键和黑键），我们听到琴声逐渐由低到高，这是因为琴声的高低与琴弦振动的频率有关，而琴弦振动的频率又与琴弦的长度有关. 粗略地说，琴弦长则振动慢，频率小，故发出的声音低；琴弦短，则振动快，频率大，故发出的声音高.



如图1，在88键钢琴中，音域宽度自大字二组的 A_2 至小字五组的 c^5. 根据“十二平均律”的法则，任何两个相邻的键所发出的音相差半音阶（100音分），它们的振动频率之比是一个常数 Q，设最低的第一个音 A_2 的频率是 a，则第二个音 $^{\#}A_2$ 的频率是 aQ，第三个音 B_2 的频率是 aQ^2……另外，音高每提高八度（如 A_2 到 A_1）频率增大为原来的2倍，而八度音域内包含12个半音（连续的7个白键和5个黑键），所以，第十三个音（A_1）的频率是第一个音（A_2）的频率的2倍. 故

$$aQ^{12}=2a,$$

即

$$Q^{12}=2.$$

另一方面,弦振动的频率与弦长成反比.所以,从左向右,相邻两弦的长度之比是常数 $q=\dfrac{1}{Q}$,从而有

$$q^{12}=\frac{1}{2}.$$

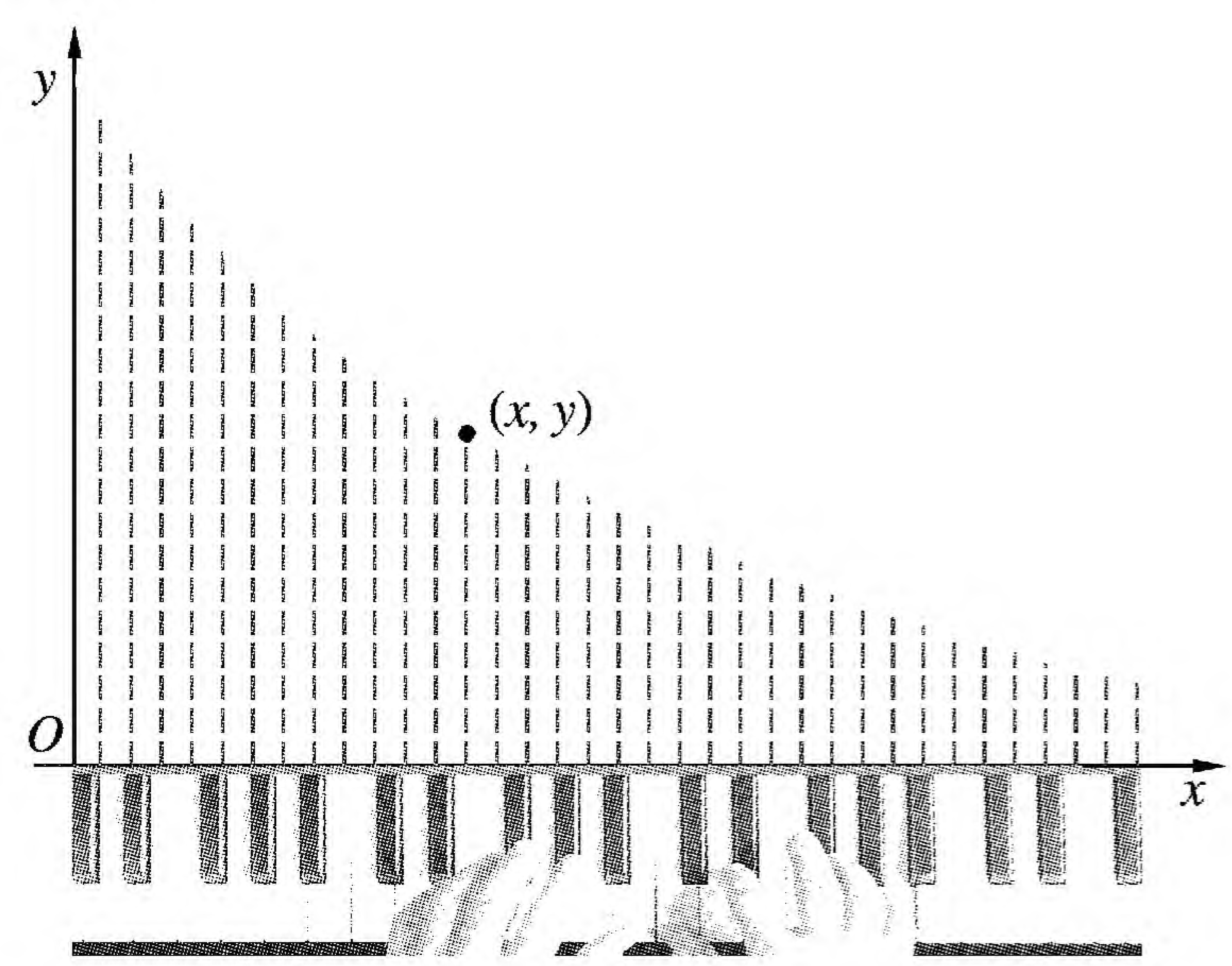
设左边第一根弦的长度为 l,则第二根弦的长度为 lq,第三根弦的长度为 lq^2……如图 2,取第一根弦所在直线为 y 轴,各弦靠近键盘的端点所在直线为 x 轴建立坐标系,相邻两弦间的距离为长度单位.这时,将弦的另一端点(上部)连成光滑曲线,那么曲线上任意点的坐标$(x,\ y)$都满足函数关系

$$y=lq^x.$$

若令 $c=\log_q l$,则 $y=lq^x$可化为

$$y=q^{x+c}.$$

经过适当平移,就可知道光滑曲线是指数函数 $y=q^x$ 的图象 —— 指数曲线.



我国明代律学家朱载堉是世界上最早从理论上研究十二平均律的学者,他通过计算,使用

$$\sqrt[12]{2}\approx 1.059\ 463\ 094\ 359\ 295\ 264\ 561\ 825,$$

现在人们通常取 $\sqrt[12]{2}\approx 1.059\ 463$,由此可见他的计算值在当时是比较精确的.

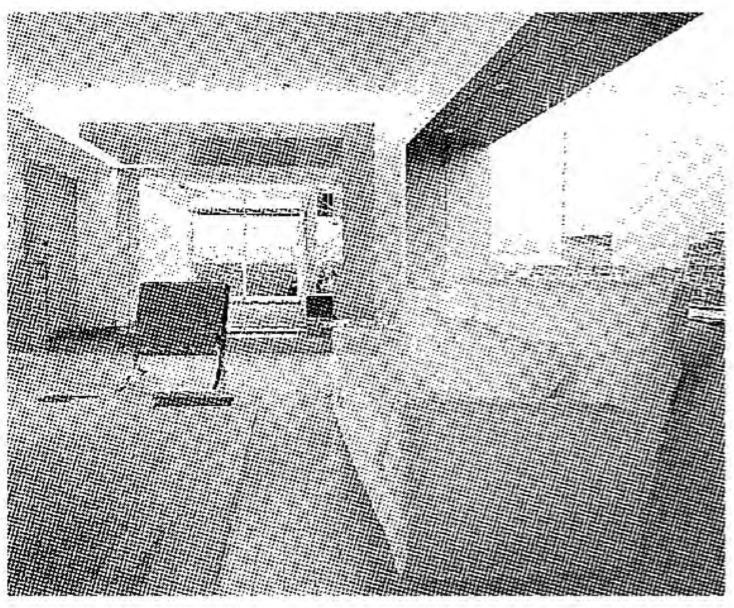
生活中到处都有数学,我们要学会用数学的眼光观察世界,用数学这一强大工具发现自然界的奥秘.

在生产、生活实际中，只要我们深入调查研究，就能发现许多问题是可以利用数学知识加以解决的.

(1) 中小学学生身高与课桌椅高度的关系

许多学校的桌椅高度都是一样的. 无疑，课桌椅高度一样不仅制作方便，而且摆放起来整齐、美观. 但是，同一高度的课桌椅不能完全适合身高不同的学生，从而给他们的身体发育带来不良影响. 因此，中小学学生的身高与课桌椅高度的关系就值得研究.

通过实地调查，研究你所在学校的学生身高与课桌椅高度的关系.



(2) 家庭贷款买房的较优计划

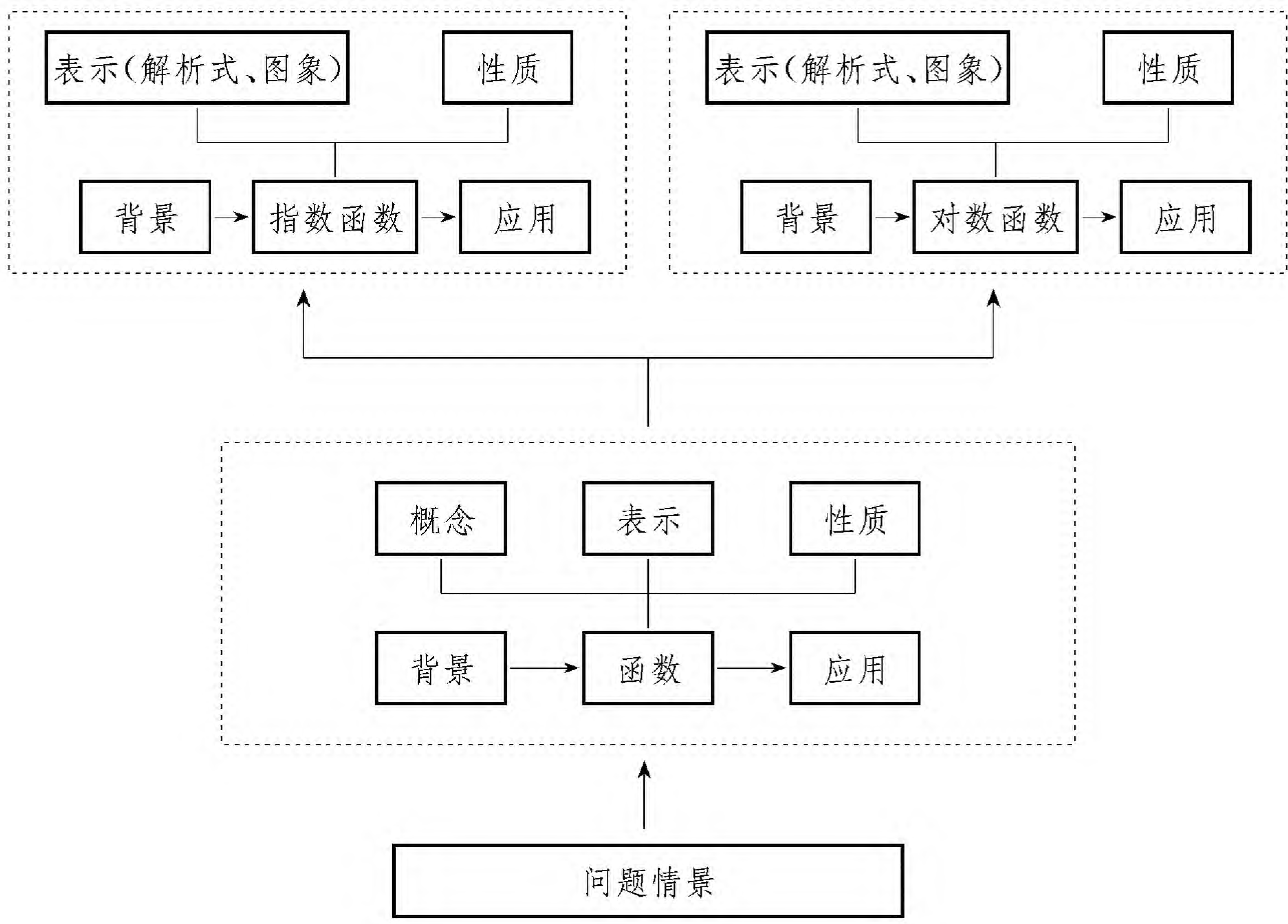
现代社会中，贷款购买住房、汽车、电器等已成为时尚. 合理的消费与投资不仅利于个人、家庭，而且利于国家的经济发展. 各种贷款方案的利息与风险是不同的，那么不同收入的人(家庭)如何根据个人(家庭)的收入以最低的利息和风险来选择贷款呢?

模拟(或实际)解决一个具体问题，例如购买一套房屋，查阅有关政策、银行的贷款方案，根据某个人(家庭)收入情况制定一个较优的方案.

仿照上述案例，以小组为单位进行观察、调查，提出问题并利用数学进行探究.

本章回顾

本章从实际背景出发，抽象出函数概念，给出函数的表示方法，研究了函数的单调性、奇偶性，进而研究了几类特殊的函数（指数函数、对数函数、幂函数）的性质及应用.



函数是两个集合上的一种对应关系. 本章主要运用数形结合的方法来研究函数的性质. 可以通过函数的图象来探索函数的性质，利用函数的性质又可以作出函数的图象. 运用函数解决问题的关键是建立数学模型.

1. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\sqrt{3x+5}$；　　(2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2}$；

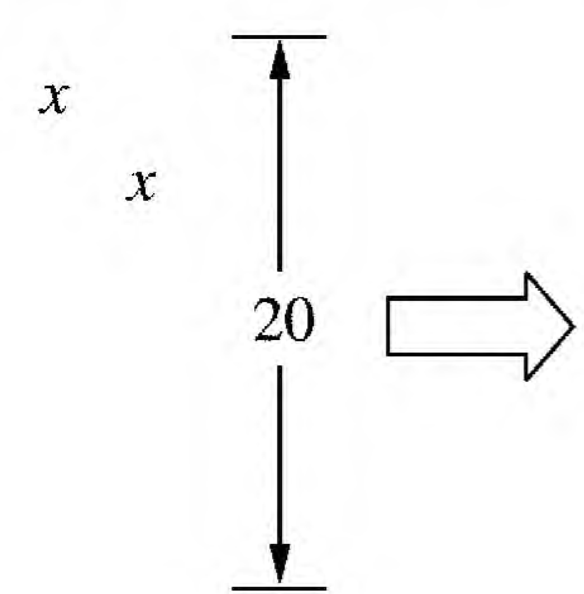
(3) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3-2x}}$；　　(4) $f(x)=\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{x+4}$.

2. 画出下列函数的图象：

(1) $y=1+\dfrac{|x|+x}{2}$；　　(2) $y=|x^2-x|$.

3. 已知函数 $f(x)=2x+1, x\in[1, 5]$，试求函数 $f(2x-3)$ 的表达式.

4. 如图所示，在一张边长为 20 cm 的正方形铁皮的四个角上，各剪去一个边长是 x cm 的小正方形，折成一个容积是 y cm^3 的无盖长方体铁盒. 试写出用 x 表示 y 的函数关系式，并指出它的定义域.



5. 画出函数 $f(x)=\begin{cases}3x^2-4, & x>0,\\ 2, & x=0,\\ 0, & x<0\end{cases}$ 的图象，并求出 $f(-2)$，$f(1)$，$f(f(2))$的值.

6. 已知 $f(x)$是一个定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，求证：

(1) $g(x)=f(x)+f(-x)$ 是偶函数；

(2) $h(x)=f(x)-f(-x)$ 是奇函数.

7. 试研究函数 $y=ax^3$ 的单调性(其中 a 是非零常数).

8. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\log_2(4+3x)$；

(2) $f(x)=\sqrt{4^x-16}$.

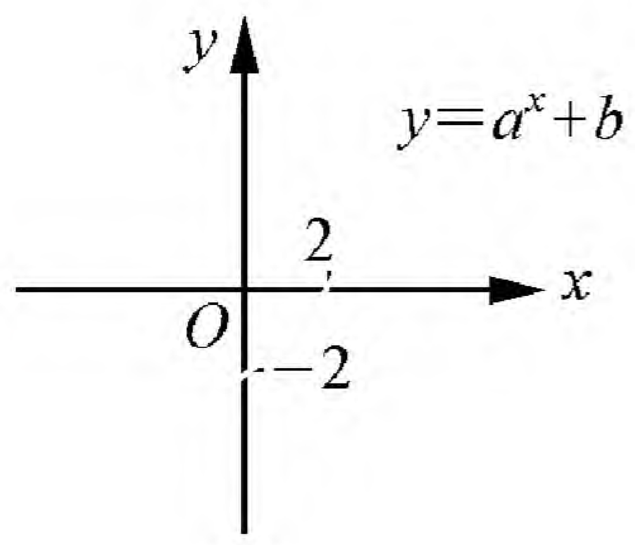
9. 二次函数的图象顶点为 $A(1, 16)$，且图象在 x 轴上截得的线段长为 8，求这个二次函数的解析式.

10. 设 $a=0.3^2$，$b=2^{0.3}$，$c=\log_{\sqrt{2}}2$，试比较 a，b，c 的大小关系.

11. 利用计算器，分别计算当 $x=1, 2, 3, \cdots, 10$ 时，函数 $y=2^x$，$y=\log_2 x$ 及 $y=x^2$ 的值，并分析判断当 x 无限增大时，这三个函数中哪个函数的增长更快些.

12. 在不考虑空气阻力的情况下，火箭的最大速度 v(m/s)和燃料的质量 M(kg)、火箭(除燃料外)的质量 m(kg)的函数关系表达式为 $v=2\,000\times\ln\left(1+\dfrac{M}{m}\right)$. 当燃料质量是火箭质量的多少倍时，火箭的最大速度可达到

12 km/s?



13. 讨论下列函数的奇偶性与单调性.

(1) $y=\lg(1+x)+\lg(1-x)$;

(2) $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

14. 已知函数 $f(x)=a^x+b$ 的图象如图所示,求 a 与 b 的值.

15. 画出下列各函数的图象,并说明这些函数的图象与函数 $y=\sqrt{x}$ 的图象之间有什么关系.

(1) $y=\sqrt{x-1}$;　　　　(2) $y=-\sqrt{x-1}$.

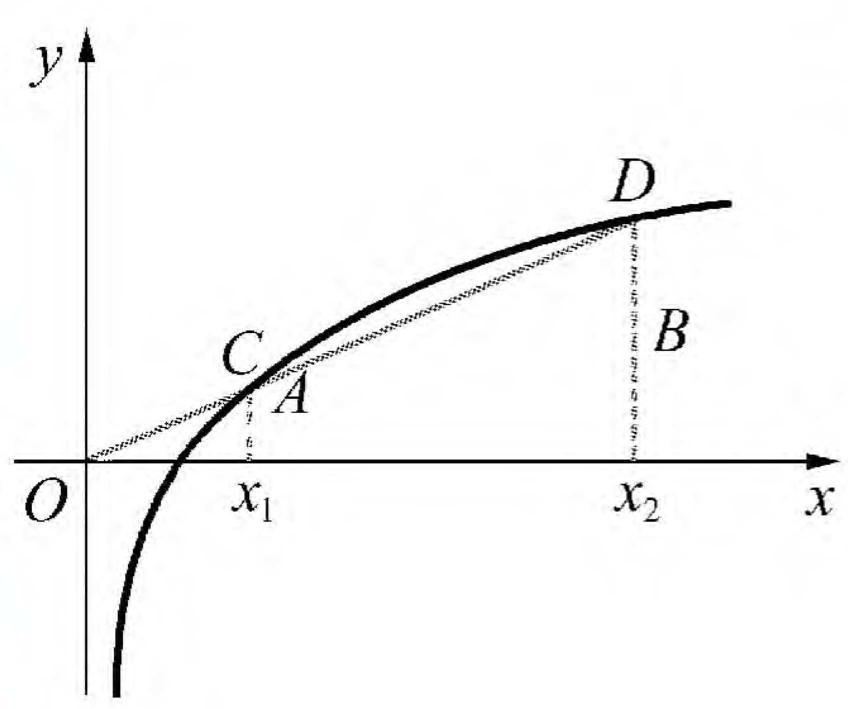
16. 画出下列各函数的图象,并说明这些函数的图象与对数函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 的图象之间有什么关系.

(1) $y=\log_{\frac{1}{2}}x+1$;　　　　(2) $y=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x}$.

17. 设 a, b, c 都是不等于 1 的正数,且 $ab\neq1$,求证:$a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$.

18. 若关于 x 的方程 $3tx^2+(3-7t)x+4=0$ 的两个实根 α, β 满足 $0<\alpha<1<\beta<2$, 求实数 t 的取值范围.

19. 已知定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$在区间$[0, +\infty)$上是单调增函数,若 $f(1)<f(\lg x)$, 求 x 的取值范围.



20. 已知过原点 O 的直线与函数 $y=\log_8 x$ 的图象交于 A, B 两点,分别过 A, B 作 y 轴的平行线与函数 $y=\log_2 x$ 的图象交于 C, D 两点.

(1) 试利用相似形的知识,证明 O, C, D 在同一条直线上;

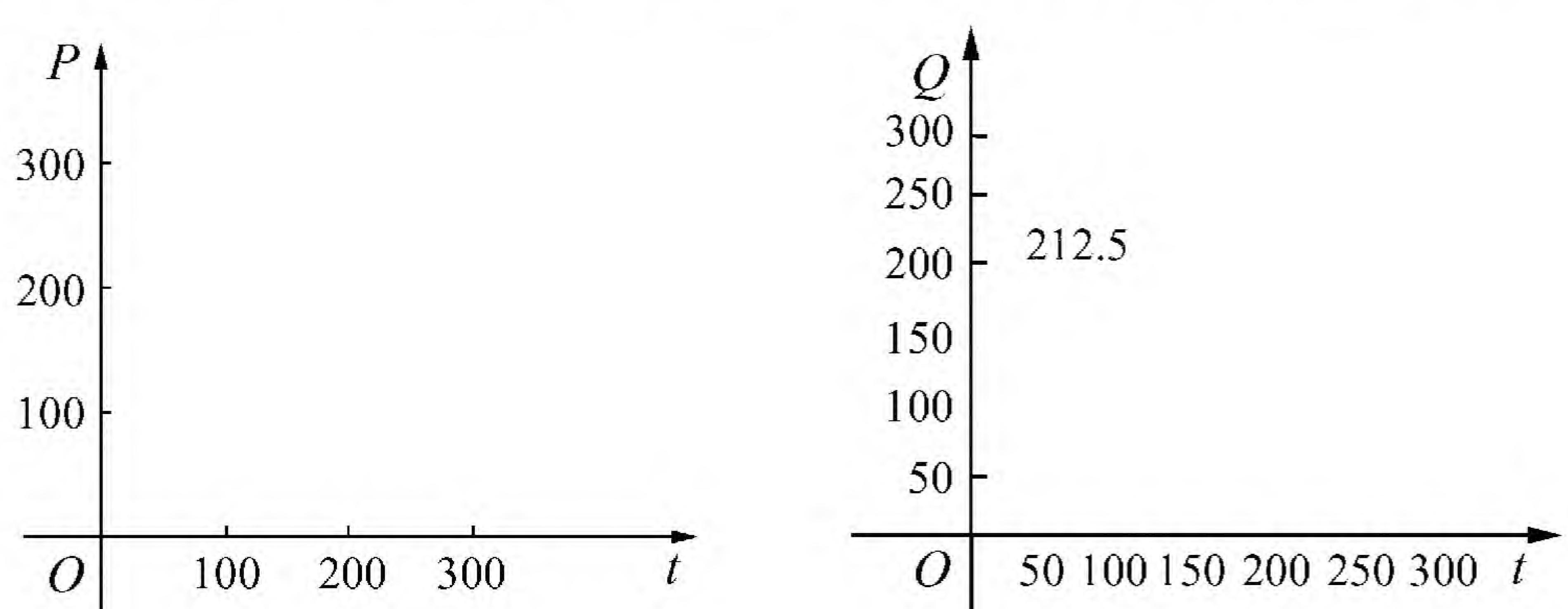
(2) 当 $BC\parallel x$ 轴时,求 A 点的坐标 .

21. 某蔬菜基地种植西红柿,由历年市场行情得知,从 2 月 1 日起的 300 天内,西红柿市场售价与上市时间的关系用图(1)的一条折线表示,西红柿的种植成本与上市时间的关系用图(2)的一段抛物线表示 .

(1) 写出图(1)表示的市场售价与时间的函数关系式 $P=f(t)$, 写出图(2)表示的种植成本与时间的函数关系式 $Q=g(t)$;

(2) 如果认定市场售价减去种植成本为纯收益,那么何时上市的西红柿纯收益最大?

(注:市场售价和种植成本的单位是元/10^2 kg,时间单位是 d)



(1)　　　　(2)

22. 田径队的小刚同学在教练指导下进行 3 000 m 跑的训练,训练计划要求是:

① 起跑后,匀加速,10 s 后达到 5 m/s 的速度,然后匀速跑到 2 min;

② 开始均匀减速,到 5 min 时已减到 4 m/s,再保持匀速跑 4 min;

③ 在 1 min 之内，逐渐加速达到 5 m/s 的速度，保持匀速往下跑；

④ 最后 200 m，均匀加速冲刺，使撞线时的速度达到 8 m/s.

(1) 画出小刚跑步的时间 t(s)与速度 v(m/s)的函数图象；

(2) 写出小刚进行长跑训练时，跑步速度关于时间的函数解析式.

23. 已知定义在实数集上的函数 $y=f(x)$ 满足条件：对于任意的 $x, y \in \mathbf{R}$，$f(x+y)=f(x)+f(y)$，求证：

(1) $f(0)=0$；

(2) $f(x)$是奇函数.

你能举出几个满足上述条件的函数吗？

24. 研究方程 $\lg(x-1)+\lg(3-x)=\lg(a-x)$ $(a \in \mathbf{R})$ 的实数解的个数.

实习作业

以小组为单位，查阅资料或进行调查，以参考主题为指导，自拟题目写一篇文章，在班级进行交流.

1. 查阅或调查内容

(1) 17 世纪前后数学发展中的重大事件；

(2) 17 世纪前后重要科学家（如开普勒、伽利略、笛卡儿、牛顿、莱布尼茨、欧拉等）；

(3) 现实生活中的函数实例.

2. 参考主题

(1) 函数概念的形成；

(2) 函数概念的发展；

(3) 函数的应用.

3. 参考资料

(1) 数学史书籍（如梁宗巨《世界数学史简编》，M. 克莱因《古今数学思想》等）；

(2) 数学家传记（如 E. T. 贝尔《数学精英》、吴文俊主编《世界著名科学家传记·数学家》（Ⅰ～Ⅳ）等）；

(3) 杂志、报纸等（如《自然科学史研究》、《数学通报》等）；

(4) 网站（如 http://www.1088.com.cn 等）.

4. 活动过程建议

(1) 讨论选题；

(2) 讨论研究框架；

(3) 讨论分工；

(4) 分头活动（查阅资料、调查、访谈、考证等）；

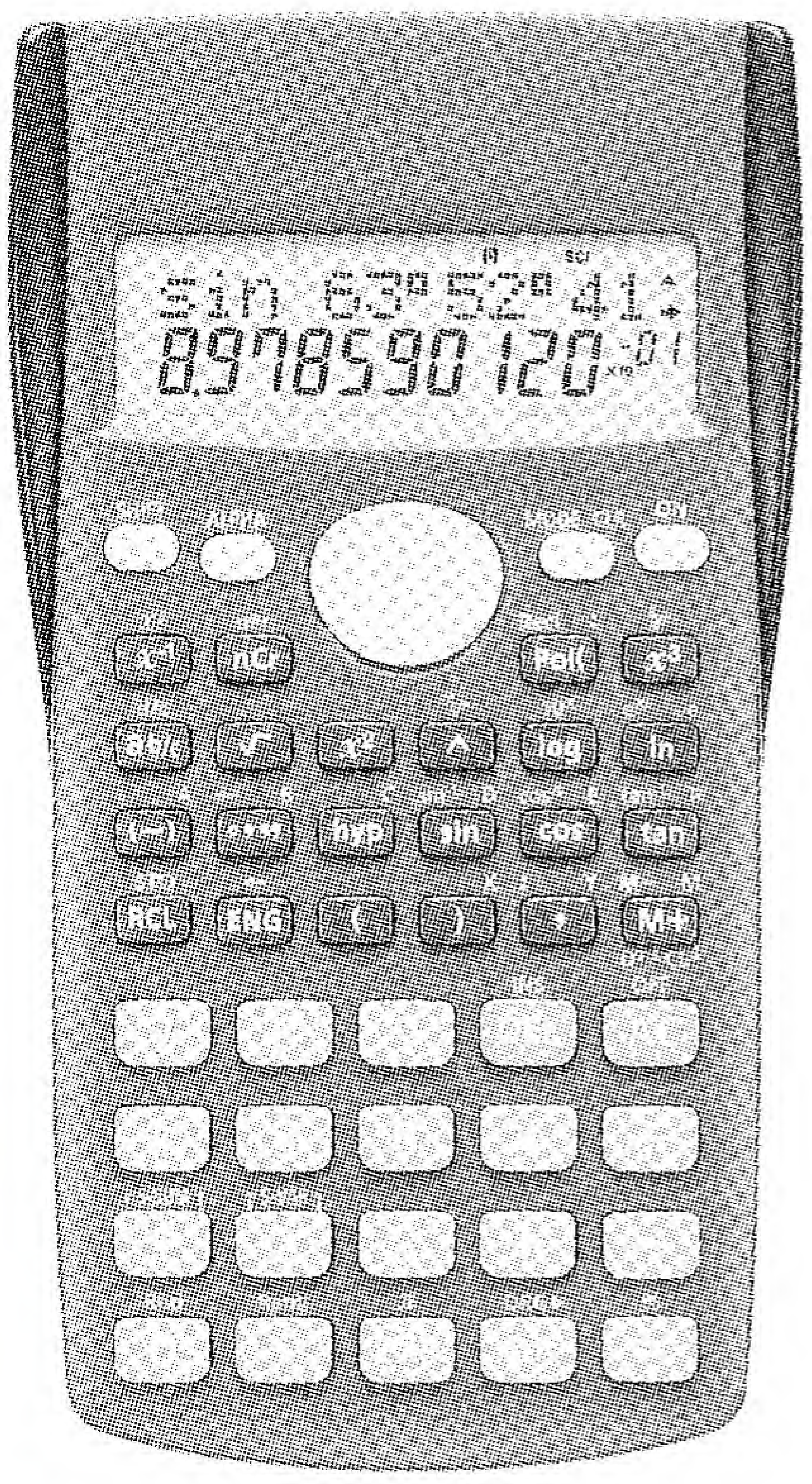
(5) 整理资料；

(6) 讨论文章的结构，撰写文章；

(7) 集体修改；

(8) 班级交流.

计算器使用范例



(1) $200 \div 7 \times 14 = 400$

200 [÷] 7 [×] 14 [=] 【400】

(指定3位小数)[MODE][MODE][MODE] [1] [3]

【400.000】

(2) 2 ÷ 7, 以 3 位有效位数(SCI3) 显示计算结果.

[MODE][MODE][MODE] [2] [3]

2 [÷] 7 [=] 【2.86^{-01}】

注：若要恢复请按 [MODE][MODE][MODE] [3] [1]

已知方程 $3.2x^2-9.2x+4.7=0$，试根据公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

求解方程.

3.2 [SHIFT] [STO] [A] [(−)] 9.2 [STO] [SHIFT] [B]

4.7 [SHIFT] [STO] [C] [AC] [ALPHA]

[B] [X^2] [−] 4 [ALPHA] [A] [ALPHA]

[C] [SHIFT] [STO] [D] [AC] [(] [(−)] [ALPHA]

[B] [+] [√] [ALPHA] [D] [)] [÷]

[(] [2] [ALPHA] [A] [)]

[=] 【2.210582305】

按[◀]键直到[B]与[√]之间, 即[+]下方, 改为[−]

[=] 【0.664417695】

考察某学校学生上课迟到的情况，该学校 2 308 个学生半年上课迟到次数列表如下，求总体平均数、方差.

迟到人数	0	1	2	3	4	5
人　　数	557	503	483	375	232	158

解：按 [MODE] [2] （进入统计状态）

[SHIFT] [CLR] [1] (Scl)（消除存储器内容）

[AC] 0 [SHIFT] [;] 557 [DT] 1 [SHIFT] [;] 503 [DT]

2 [SHIFT] [;] 483 [DT] 3 [SHIFT] [;] 375 [DT]

4 [SHIFT] [;] 232 [DT] 5 [SHIFT] [;] 158 [DT]

[SHIFT] [S-VAR] [1] ($\bar{x}$) [=] 【$\bar{X}$ 1.868284229】

[SHIFT] [S-VAR] [2] (Xσn) [=] 【Xσn 1.531862405】

[X^2] [=] 【Ans^2 2.346602429】